Diplomvorprüfung in Mathematik II - Analysis - Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller:	Bergmann,Hörwick,Kloster,Pöschl,Warendorf

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen**!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / ca. Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Die Aufgaben 1-5 gelten für alle Studierenden. Alle Studierenden aus dem 2. Semester bearbeiten zusätzlich Aufgabe 6, alle Wiederholer Aufgabe 7

1. **Aufgabe: Ebene Kurven** **(/ ca. 10 Punkte)**
   Gegeben ist die ebene Kurve

$$\mathcal{C} : x(t) = t - t^3, \quad y(t) = t^2, \quad -1 \leq t \leq +1$$

   (a) Berechnen Sie die Stelle t_h, für die die Kurve eine horizontale Tangente hat. Berechnen sie auch den zugehörigen Punkt $H = (x_h, y_h)$.

   (/ca. 3)

   (b) Berechnen Sie die Stellen t_{v1} und t_{v2}, für die die Kurve eine vertikale Tangente hat. Berechnen sie auch den zugehörigen Punkte $V_1 = (x_{v1}, y_{v1})$ und $V_2 = (x_{v2}, y_{v2})$.

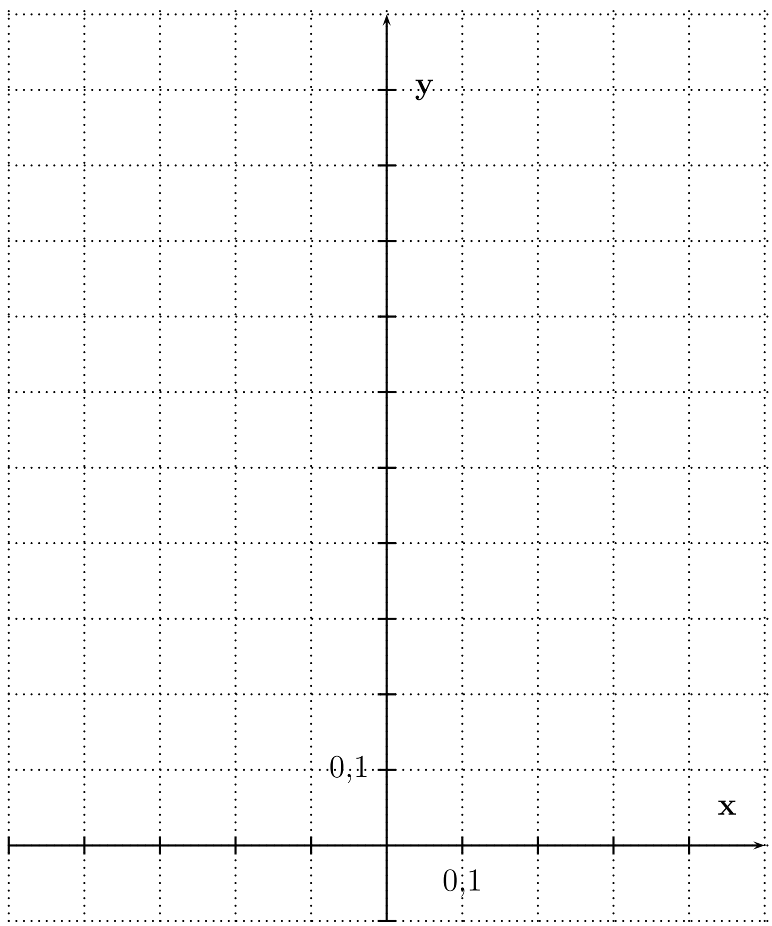
   (/ca. 3)

(c) Berechnen Sie die Neigung der Tangenten zu den t-Werten $t_A = 1$ (mit dem zugehörigen Punkt $A = (x_A, y_A)$) und $t_E = -1$ (mit dem zugehörigen Punkt $E = (x_E, y_E)$).

(/ca. 3)

(d) Skizzieren Sie die Kurve mit Hilfe der Ergebnisse aus (a), (b) und (c).

(/ca. 1)



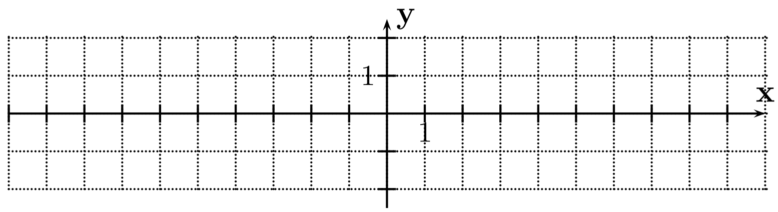
2. **Aufgabe: Fourierreihen** **(/ ca. 12 Punkte)**

Gegeben ist die folgende periodische Funktion mit der Periode $T = 2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} -c & \text{für } -a \le t \le 0 \\ +c & \text{für } 0 < t \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{für } -\pi \le t < \pi, \quad \text{periodisch sonst, } a \in]-\pi, \pi[.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-3\pi, 3\pi[$ für $a = \frac{\pi}{2}$ und $c = 2$ (1LE=0,5cm).

(/ca. 3)



(b) Welche Symmetrieeigenschaften hat $f(t)$? Was folgt daraus für die Fourier-Koeffizienten?

(/ca. 2)

(c) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten der zugehörigen Fourierreihe von $f(t)$ für $a = \frac{\pi}{2}$, c beliebig .

(/ca. 2)

(d) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 4. Glied an: $F_4(t)$ für $c = 1$.

(/ca. 5)

3. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** **(/ ca. 16 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = x^2 + xy^2 + 2x + 3.$$

(a) Berechnen und zeichnen (1LE =1cm) Sie die Schnittkurve mit der x, z-Ebene.

(/ca. 2)

(b) Berechnen Sie die Tangentialebene im Punkt $P = (-1; 1; z_P)$.

(/ca. 4)

(c) Bestimmen Sie falls vorhanden die Extremwerte und Sattelpunkte.

(/ca. 5)

(d) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unten (z=0) von dem Normalbereich B und oben von der gegebenen Fläche
$(z = f(x, y) = x^2 + xy^2 + 2x + 3)$ begrenzt wird.
B sei begrenzt durch die Geraden $g_1(x) = \frac{1}{2}x$, $g_2(x) = 0$ und $g_3 : x = 2$. Skizzieren Sie zuerst B.

(/ca. 5)

4. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** **(/ ca. 12 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = (x + y - 1)^2 - 1$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung 1. Ordnung .

(/ca. 4)

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Randbedingung:
$x_1 = 1, y_1 = y(x_1) = 1$.

(/ca. 2)

(c) Berechnen Sie $y_s(0)$ analytisch.

(/ca. 1)

(d) Berechnen Sie den Näherungswert bei $x_0 = 0$ mit den Randbedingungen aus (b) ($x_1 = 1$ und $y_1 = 1$) und $h = -1$ mit Hilfe vom Runge-Kutta-Verfahren in einem Schritt.

(/ca. 5)

5. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (/ ca. 9 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 5y' + 6y = 20e^{2x}$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 3)

(b) Geben Sie die Ansatzfunktion für die Berechnung der partikulären Lösung an.

(/ca. 1)

(c) Berechnen Sie die partikuläre Lösung.

(/ca. 4)

(d) Geben Sie die Gesamtlösung (allgemeine Lösung) der inhomogenen Differentialgleichung an.

(/ca. 1)

ACHTUNG: Nur für Studierende des 2. Semesters.

6. **Aufgabe: Statistisches Verfahren (/ ca. 9 Punkte)**

Gegeben ist die folgende Messreihe:

Klasse	$8 \leq x < 10$	$10 \leq x < 12$	$12 \leq x < 14$	$14 \leq x < 16$	$16 \leq x < 18$
Anzahl x_i	8	20	42	18	12

(a) Zeichnen Sie das zugehörige Balkendiagramm.

(/ca. 2)

(b) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standarabweichung s.

(/ca. 3)

(c) Im Folgenden sei die Standardabweichung $\sigma = s$ und der Erwartungswert $\xi = \bar{x}$ aus Teil (b) zu verwenden. (Wenn Sie die Werte nicht bestimmen konnten, verwenden Sie die Ersatzwerte $\sigma_e = 4,8$ und $\xi_e = 13,1$) Es sei davon auszugehen, dass die Daten näherungsweise normalveteilt sind.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt demnach ein Messwert X_i im Bereich $13,6 \leq X_i < 16,5$?
Lesen Sie dazu geeignete Werte aus der Tabelle der Normalverteilung ab (s. Anhang).
Die Eingabewerte für die Quantile der Verteilungsfunktion der Normalverteilung sollen dazu auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet werden.

(/ca. 4)

ACHTUNG: Nur für WiederholerInnen.

7. **Aufgabe: Taylor-Reihen** **(/ ca. 10 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right), \quad |x| \leq \frac{\pi}{4}$$

(a) Bestimmen Sie die Glieder der Taylor-Polynom um $x_0 = 0$ (MacLaurin-Reihe) von $f(x)$ bis zur Potenz x^4.
Hinweis: Versuchen Sie das Polynom aus gegebenen Reihen zu berechnen.

(/ca. 5)

(b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} T_4(x)\mathrm{d}x$.

(/ca. 2)

(c) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$.

(/ca. 2)