Hochschule München | Fakultät 03 FA | SS 12

Diplomvorprüfung in Mathematik II - Analysis - Fahrzeugtechnik -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner
Aufgabensteller:	Hörwick,Kaltsidou-Kloster,Pöschl,Warendorf,Mahnke

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen**!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / ca. 60
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** **(/ ca. 12 Punkte)**
Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = y \cdot \cos(x) + x^2, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion.

(/ca. 2,5)

(b) Bestimmen Sie (soweit vorhanden) alle Extrem- und Sattelpunkte, sowie bei den Extrempunkten deren Typ.

(/ca. 6,5)

(c) Berechnen Sie den Wert des Doppelintegrals

$$\int_0^{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

(/ca. 3)

2. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** **(/ ca. 8 Punkte)**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot y = \frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}, \quad x > 1$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

(/ca. 6)

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu $x_0 = 2$ und $y_0 = y(x_0) = 0$.

(/ca. 2)

3. **Aufgabe: Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (/ ca. 10 Punkte)**
Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 6y' + 10y = s_i(x)$$

(a) Berechnen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 2)

(b) Es sei $s_1(x) = \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos(x)$.
Bestimmen Sie die Ansatzfunktion zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

(/ca. 2)

(c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung für die Störfunktion $s_2(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(/ca. 4)

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung für die Anfangswerte $x_0 = 0$, $y(x_0) = 3$ und $y'(x_0) = 0$.

(/ca. 2)

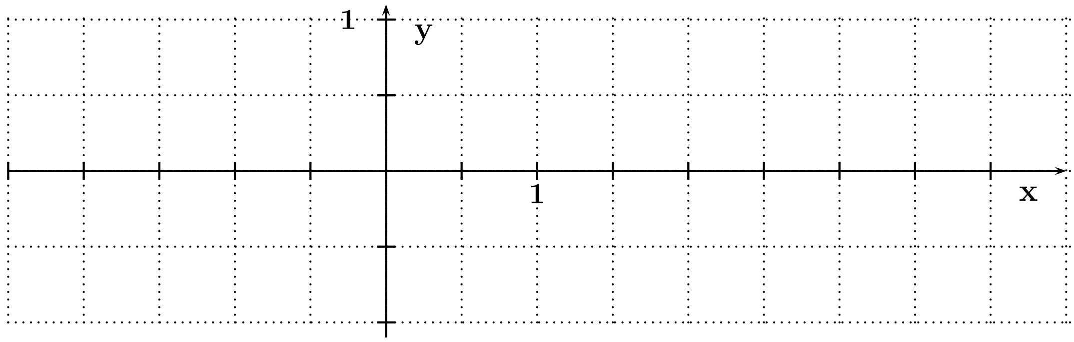
4. **Aufgabe: Fourierreihen** **(/ ca. 10 Punkte)**

Gegeben sei die periodische Funktion mit der Periode $T = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ x(2-x) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ \text{period.} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $-2 \leq x \leq 4$.

(/ca. 2)



(b) Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten (a_0, a_n, b_n). **Beachten Sie hierbei die Symmetrie!**

(/ca. 6)

(c) Geben Sie das Fourier-Polynom bis zum 2. Glied $F_2(x)$ an.

(/ca. 2)

5. **Aufgabe: Komplexe Zahlen (Überlagerung von Schwingungen)**
(/ ca. 10 Punkte)

Gegeben sind die zwei gleichfrequenten Schwingungen mit der Freguenz $\omega = 1$

$$s_1(t) = 3 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$s_2(t) = 4 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Diese 2 Schwingungen sollen überlagert werden, d.h. gesucht ist die Summenfunktion $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.
$s(t)$ ist wieder eine Sinusschwingung mit der Freguenz $\omega = 1$. In dieser Aufgabe soll die Lösung mit Hilfe von komplexen Zahlen bestimmt werden!
Rechnen Sie mit 6 Nachkommastellen.

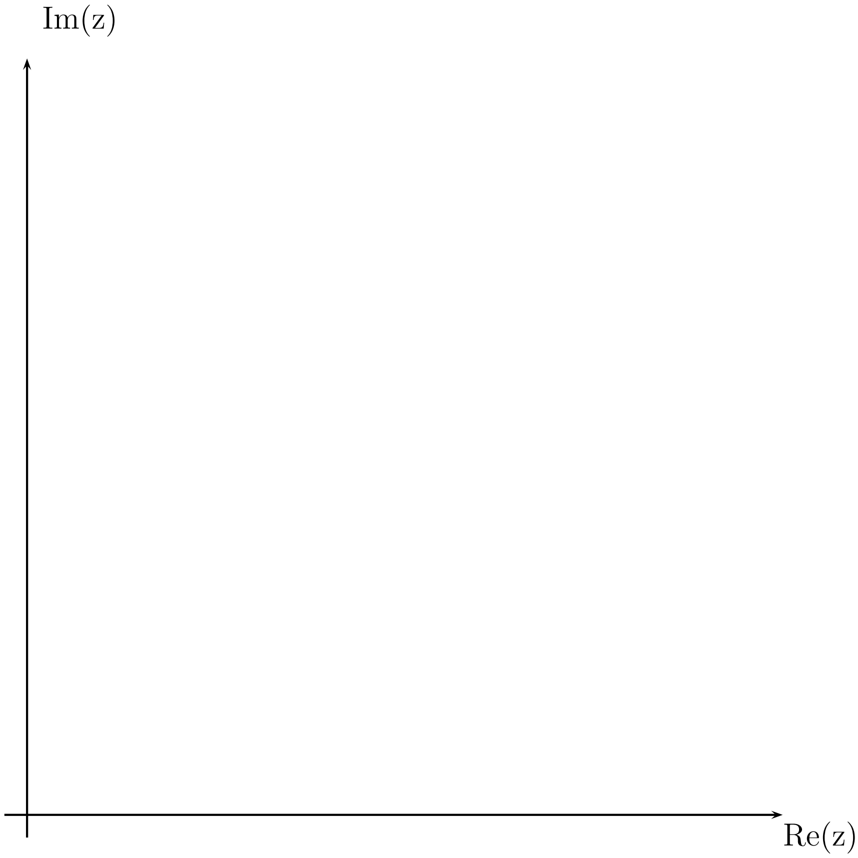
(a) Formen Sie $s_1(t)$ und $s_2(t)$ in ihre jeweils komplexe Form $\underline{s_1}(t)$ und $\underline{s_2}(t)$ um und berechnen Sie komplexen Amplituden
$\underline{A_1}$ $(= \underline{s_1}(t = 0))$ und $\underline{A_2}$ $(= \underline{s_2}(t = 0))$ in kartesischer Darstellung.

(/ca. 3)

Fortsetzung Aufgabe: Überlagerung von Schwingungen

(b) Zeichnen Sie in die komplexe Ebene die komplexen Amplituden $\underline{A_1}$ $(= \underline{s_1}(t = 0))$ und $\underline{A_2}$ $(= \underline{s_2}(t = 0))$ **(2 cm $\hat{=}$ 1 LE)**.
Bilden Sie grafisch die komplexe Amplitude $\underline{A} = \underline{A_1} + \underline{A_2}$ der Summenfunktion $\underline{s}(t)$. Lesen sie den Betrag r und den Phasenwinkel φ aus der Zeichnung ab.

(/ca. 3)



(c) Bilden Sie jetzt die komplexe Summenfunktion $\underline{s}(t) = \underline{s_1}(t) + \underline{s_2}(t)$ unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus (a). Transformieren Sie dann $\underline{s}(t)$ in die reelle Sinusschwingung $s(t)$.

(/ca. 4)

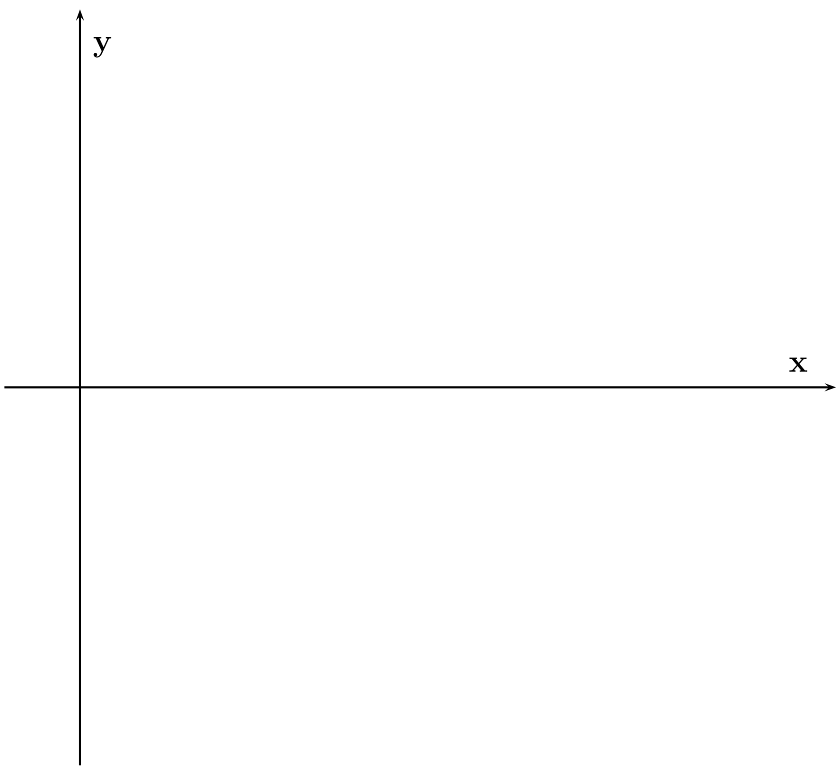
6. **Aufgabe: Ebene Kurven** **(/ ca. 10 Punkte)**
Gegeben ist die ebene Kurve in Polarkoordinatendarstellung die sogenannte Lemniskate (Spezialfall der Cassinischen Kurven).

$$r(\varphi) = a\sqrt{2\cos(2\varphi)} \text{ mit } \cos(2\varphi) \geq 0$$

(a) Vervollständigen Sie die Wertetabelle und skizzieren Sie die Kurve für $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$, mit $a = 1$. **(1 cm $\widehat{=}$ 0,2 LE)**

(/ca. 4,5)

φ	$r(\varphi)$
$-\frac{\pi}{4}$	
$-\frac{\pi}{6}$	
$-\frac{\pi}{8}$	
0	
$\frac{\pi}{8}$	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	



Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

(b) Berechnen Sie die Sektorfläche der Lemniskate im Intervall $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ mit $a = 1$

(/ca. 1,5)

(c) Berechnen Sie $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$.

(/ca. 1)

(d) Zeigen Sie, dass Darstellung der Lemniskate in kartesischen Koordinaten lautet:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

unter Benutzung von $x = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$, $y = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$.

(/ca. 3)