FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN | FACHBEREICH 03 FA | WS 05/06

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner ohne Grafikdisplay
Aufgabensteller: Warendorf, Pöschl, Selting, Kloster

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen** !!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!

Alle Studenten, die den Maple-Kurs besucht haben, bearbeiten Aufgabe 6.
Alle anderen Studenten (ohne Maple-Kurs) bearbeiten Aufgabe 7

Name: Vorname: Matrikelnummer:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: / 60 Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** **(/ ca. 13 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 1 - (y - x)^2.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung. (Hinweis: Substitution ist hier das geeignete Verfahren.)

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung:
$x_0 = 0, y_0 = y(x_0) = 1$

(c) Berechnen Sie die Lösung y_s an der Stelle $x = 1$ exakt.

(d) Berechnen Sie die Lösung an der Stelle $x = 1$ mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung ($h = 1$, Anfangsbedingungen s. (b)).

2. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung** **(/ ca. 10 Punkte)**
Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + y' = 5\sin(2x).$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung y_s für die Anfangsbedingung:
$x_0 = 0, y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$

3. **Aufgabe: Fourierreihen** **(/ ca. 13 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion 2π-periodische Funktion

$$f(t) = \cos(\frac{t}{2}) \quad t \in [-\pi, \pi[\text{ , periodisch sonst.}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und untersuchen Sie sie auf Symmetrie.

(b) Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_n und b_n der zugehörigen Fourierreihe von $f(t)$.

(c) Geben Sie die Fourierreihe bis zum 4. Glied an: $F_4(t)$.

4. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** **(/ ca. 10 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

(a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktion an.

(b) Für welche Werte (x, y) ist $f(x, y) = 0$ bzw. $f(x, y) > 0$ bzw. $f(x, y) < 0$

(c) Zeichnen Sie die Höhenlinien für $z = -0,5$, $z = 0$ und $z = 1$ in ein Diagramm (1LE=2cm).

(d) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Geben Sie Art und Lage der Extremwerte an, soweit welche vorhanden sind ($z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$).

(e) Beschreiben Sie mit Hilfe obiger Erkenntnisse die Form der Funktion.

5. **Aufgabe: Ebene Kurven** **(/ ca. 7 Punkte)**
Gegeben ist die ebene Kurve

$$\mathcal{C} : x(t) = t^2, \quad y(t) = (1-t)^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(a) Ermitteln Sie die Punkte P_A, P_B und P_C an den Stellen $t_A = 0$, $t_B = \frac{1}{2}$ und $t_C = 1$. Skizzieren Sie die Kurve mit Hilfe dieser 3 Punkte (1LE=2cm).

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A zwischen den Koordinatenachsen und der Kurve $\mathcal{C}$ im Intervall $0 \leq t \leq 1$.

6. **Aufgabe: Maple** **(/ ca. 7 Punkte)**

ACHTUNG: NUR FÜR STUDENTEN, DIE DEN MAPLE-KURS BESUCHT HABEN

(a) Geben Sie die Maple-Ausgabe der folgenden Maple-Befehle an. Zeichnen Sie auch den Plot (1LE=2cm).

```
> f:=x->x^2;
```

```
> A:=int(f(x),x=0..3);
```

```
> plot(f(x),x=-1..1,scaling=constrained);
```

(b) Geben Sie die Maple-Befehle für die allgemeine und die spezielle Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabe 1 an ($y' = 1-(y-x)^2$, Anfangsbedingungen $x = 0, y = 1$).

7. **Aufgabe: Newton-Verfahren und Reihenentwicklung** **(/ ca. 7 Punkte)**
ACHTUNG: NUR FÜR STUDENTEN, DIE NICHT DEN MAPLE-KURS BESUCHT HABEN
Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x) + 1 = \sinh(x) \quad x \geq 0.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung der obigen Gleichung mit dem Newtonverfahren auf 4 Stellen hinter dem Komma genau (Startwert: $x_0 = 1,4$).
(Hinweis: Überführen Sie die Gleichung zuerst in ein Nullstellenproblem.)

(b) Bestimmen Sie die Lösung der obigen Gleichung mit Hilfe von Reihenentwicklung. Verwenden Sie dazu für die linke und rechte Seite der Gleichung jeweils die Taylor-Reihenentwicklung bis zum Glied x^5.

(c) Setzen Sie die Lösungen in die Gleichung ein. Welche der beiden angenäherten Lösungen erfüllt die Gleichung besser?