HOCHSCHULE MÜNCHEN FAKULTÄT 03 FA WS 11/12

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

| | |
|---|---|
| Arbeitszeit: | 90 Minuten |
| Hilfsmittel: | Formelsammlung, Skripten, Bücher,Taschenrechner |
| Aufgabensteller: | Kaltsidou-Kloster,Mahnke, Pöschl,Warendorf |

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen**!
**Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein**!

| | | |
|---|---|---|
| Name: | Geb.-Datum: | Punkte: / ca. 59 |
| Vorname: | Stud.-Gruppe: | Korr.: |
| Raum/Platz-Nr.: | Aufsicht: | Note: |

1. **Aufgabe: Ebene Kurven** **( / ca. 12 Punkte)**

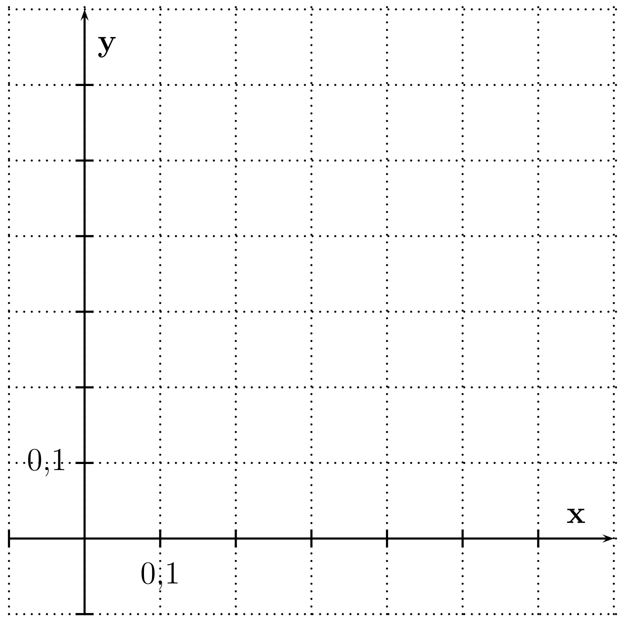
Gegeben ist die ebene Kurve

$$\mathcal{C} : x(t) = \frac{t}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t^2}{1+t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(a) Vervollständigen Sie die Wertetabelle (2 Nachkommastellen) und skizzieren Sie die Kurve.

( /ca. 4)

| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 0,25 | 0,24 | |
| 0,5 | | 0,17 |
| 0,75 | | |
| 1 | | |



*Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven*

(b) Ermitteln Sie die Kurvenpunkte (d.h. t, x(t) und y(t)), wo eine senkrechte bzw.waagerechte Tangente vorliegt. Zeichnen Sie die Tangenten in das Koordinatenkreuz ein.

( /ca. 4 )

(c) Welche Bogenlänge hat die Kurve von $t = 0$ bis $t = 1$?

i. Zeigen Sie zuerst, dass Sie für die Bogenlänge folgendes Integral berechnen müssen:

$$s = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{t^2(2+t)^2}{(1+t)^4}} \mathrm{d}t$$

ii. Berechnen Sie die Bogenlänge näherungsweise mit der Simpsonregel mit der Schrittweite $h = 0{,}5$. Wenn Sie ein anderes Integral zur Berechnung von $s$ erhalten haben, verwenden Sie das angebene $s$.

( /ca. 4)

2. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** **( / ca. 10 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x,y) = x^2 + \left(x^2 - 1\right) \cdot (y+1) - 1$$

(a) Bestimmen Sie (soweit vorhanden) alle Extrem- und Sattelpunkte, sowie bei den Extrempunkten deren Typ.

( /ca. 6 )

*Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen*

(b) Nun sei $f(x,y)$ auf die Gerade $g : y = -2x$ beschränkt (d.h. Sie müssen in $f$ $y = -2x$ setzen). Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $f(x;y)$ auf die Gerade $g$ an der Stelle $E_1(1;-2)$ ein lokales Maximum besitzt.

( /ca. 4 )

3. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** **( / ca. 10 Punkte)**
Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + \cot(x) \cdot y = \cos(x)\,, \quad \text{mit } \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},\ 0 < x < \pi$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

( /ca. 8 )

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $y_0 = y(x_0) = 0$.

( /ca. 2 )

4. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

**( / ca. 12 Punkte)**

Es sei $a > 0$. Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung 2.Ordnung

$$a^2 y'' + y = \sin(2x)$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung in Abhängigkeit von $a > 0$ an.

( /ca. 2 )

(b) Bestimmen Sie die Ansatzfunktionen zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Abhängigkeit von $a > 0$. (Achtung: Fallunterscheidung!)

( /ca. 2)

*Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung*

(c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung für $a \neq \frac{1}{2}$ in Abhängigkeit von $a > 0$.

( /ca. 6 )

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung zu $a = 2$ und den Anfangswerten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ (Aufgabenteil (c) verwenden!!!).

( /ca. 2 )

5. **Aufgabe: Taylorreihen** **( / ca. 6 Punkte)**

Gegeben ist die folgende Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin(x) \quad \text{mit } x \geq 0$$

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T_4$ um $x_0 = 0$ bis zur Potenz $x^4$.

( /ca. 2 )

(b) Lösen Sie angenähert die transzendente Gleichung $x \cdot \sin(x) = 4x^2 - 0{,}5$ , in dem Sie die linke Seite der Gleichung durch $T_4$ ersetzen, so dass eine biquadratische Gleichung entsteht.
Prüfen Sie durch Einsetzen nach wie gut die Lösung die transzendente Gleichung erfüllt.

( /ca. 4 )

6. **Aufgabe: Fehlerrechnung mit totalem Differential** **( / ca. 8 Punkte)**
Die potentielle Energie $E_{\text{pot}}$ zweier sich anziehender Körper berechnet sich wie folgt:

$$E_{\text{pot}} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r}$$

mit :
$m_1$, $m_2$: Massen der sich anziehenden Körper, $r$: Abstand der sich anziehenden Körper und $G = 6{,}6742 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$: Gravitationskonstante. Folgende Werte werden gemessen:

- Masse 1: $m_1 = 20000$kg mit einer Messungenauigkeit von $dm_1 = \pm 0{,}30$kg.
- Masse 2: $m_2 = 15000$kg mit einer Messungenauigkeit von $dm_2 = \pm 0{,}25$kg.
- Abstand der Körper: $r = 2$m mit einer Messungenauigkeit von $dr = \pm 0{,}05cm$.

(a) Berechnen Sie potentielle Energie $E_{\text{pot}}$ mit den gemessenen Werten $m_1$, $m_2$ und $r$ **($G$ können Sie als Konstante stehen lassen)**.

( /ca. 1 )

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $E_{\text{pot}}$ nach $m_1$, nach $m_2$ und nach $r$.

( /ca. 3 )

(c) Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler mit den oben gegebenen Messungenauigkeiten unter Verwendung des totalen Differentials.

( /ca. 4 )