

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - ANALYSIS - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner

Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Mahnke, Pöschl, Warendorf

**WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!**

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / ca. 51
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. Aufgabe: Ebene Kurven

(/ ca. 8 Punkte)

Gegeben ist die ebene Kurve

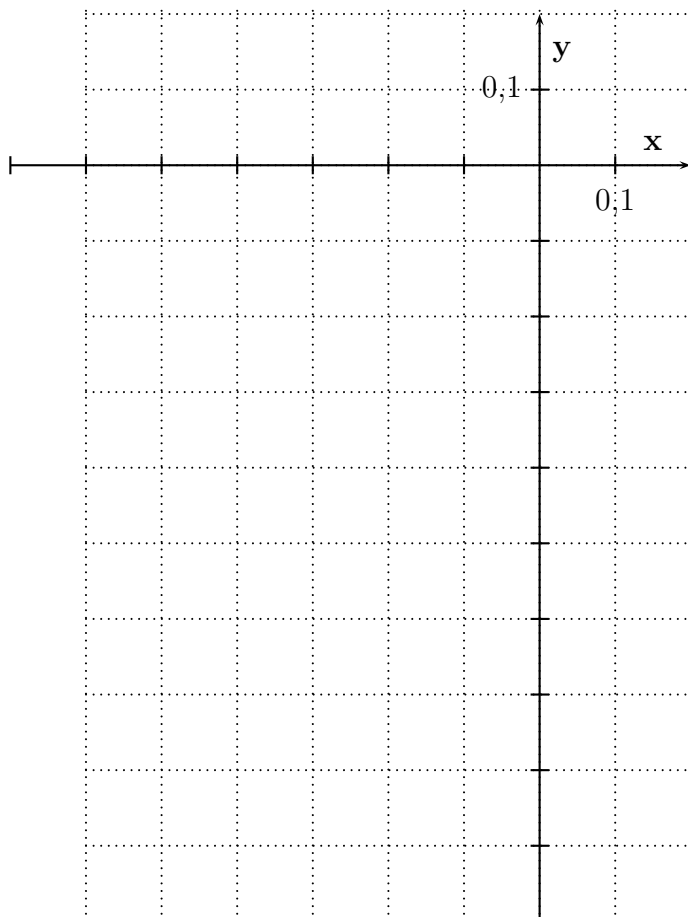
$$C : x(t) = t \cdot (\ln(t) - 0,5), \quad y(t) = t^2 - 1, \quad 0 < t \leq 1$$

- (a) Vervollständigen Sie die Wertetabelle (2 Nachkommastellen) und skizzieren Sie die Kurve.

(ACHTUNG: Für $t \rightarrow 0$ müssen Sie einen Grenzwert bilden.)

(/ca. 4)

t	$x(t)$	$y(t)$
$t \rightarrow 0$		
0,1	-0,28	
0,2		-0,96
0,4	-0,57	
0,6		-0,64
0,8	-0,58	
1	-0,5	



Fortsetzung Aufgabe: Ebene Kurven

- (b) Ermitteln Sie die Kurvenpunkte (d.h. t , $x(t)$ und $y(t)$), wo eine senkrechte bzw. waagerechte Tangente vorliegt. Zeichnen Sie die Tangenten in das Koordinatenkreuz ein.

(/ca. 4)

2. Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

(/ ca. 9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion von 2 Variablen

$$z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{1 + y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

- (a) Bestimmen Sie (soweit vorhanden) alle Extrem- und Sattelpunkte, sowie bei den Extrempunkten deren Typ.

(/ca. 6)

Fortsetzung Aufgabe: Funktion von 2 Variablen

- (b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unten ($z=0$) von dem Normalbereich $B : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ und oben von der gegebenen Fläche ($z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{1+y^2}$) begrenzt wird.

(/ca. 3)

3. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 7 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + \frac{1}{x+1} \cdot y = \cos(x), \quad 0 < x < 2\pi$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(/ca. 7)

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung

4. Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
(/ ca. 10 Punkte)

Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 8y = s(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) Geben Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an.

(/ca. 2)

- (b) Bestimmen Sie die Ansatzfunktion zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für

$$s(t) = 12e^{-4t}$$

(/ca. 2)

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung

(c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung.

(/ca. 3)

(d) Berechnen Sie die spezielle Lösung und den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ (Aufgabenteil (c) verwenden!!!).

(/ca. 3)

5. **Aufgabe: Taylorreihen** (/ ca. 11 Punkte)

Gegeben ist die folgende Funktion

$$f(x) = (\ln(x^2 + 1))^2.$$

ACHTUNG: Aufgabenteil (c) und (d) können Sie für die Funktion f bearbeiten ohne (a) und (b) gelöst zu haben.

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung von der Funktion f .

(/ca. 4)

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung T_2 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ bis zur Potenz $(x - 1)^2$.

(/ca. 2)

Fortsetzung Aufgabe: Taylorreihen

- (c) Erstellen Sie eine Wertetabelle (2 Nachkommastellen) der Funktion f und des Taylorpolynoms aus Aufgabenteil (b) für 5 x -Werte aus $[-1; 3]$.

(/ca. 2,5)

- (d) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f , sowie den Graph des Taylorpolynoms aus Aufgabenteil (b) in ein gemeinsames Koordinatensystem ein, mit $1LE = 1cm$.

(/ca. 2,5)

6. **Aufgabe: Newton-Verfahren** (/ ca. 6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rechnen Sie mit 4 Nachkommastellen.

(a) Überprüfen Sie, ob das Konvergenzkriterium des Newtonverfahrens:

$$\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \right| < 1$$

für den Startwert $x_0 = 0,5$ erfüllt ist.

(/ca. 3)

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens angenähert die Nullstelle von f . Brechen Sie das Verfahren ab, wenn sich die 3. Nachkommastelle nicht mehr ändert.

(/ca. 3)