Lösung

Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **SS 2003**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller:	Gröger, Kloster, Plöchinger, Pöschl, Stiefenhofer

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!
(Ausnahme: Aufgabe 1, wo das richtige Ankreuzen genügt.)

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte:** (/ 42)
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: (Matrizenrechnung) Es ist jeweils eine oder mehr als eine Aussage richtig!
(Jedes richtige Kreuz ergibt einen Punkt, jedes falsche einen Punktabzug, bei negativen Werten werden 0 Punkte eintragen)

a) Welches der folgenden Produkte vom Matrizen ist Null:

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ (/2)

b) Welche der folgenden Eigenschaften hat ein Matrizenprodukt nicht

☐ Assoziativität ☒ Kommutativität ☐ Distributivität (/1)

c) Welche der folgenden Übergänge kann nicht durch **eine** elementare Umformung (damit ist die Addition des Vielfachen einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte der Matrix gemeint) geschehen sein:

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (/2)

d) A, B und C seien n-reihige quadratische Matrizen. Kreuzen Sie jeweils **alle** richtigen Aussagen an:
B gehe aus A durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen der Matrix hervor.

☒ $\det(B) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$ ☒ $\det(B) = \det(A)$ ☐ $\det(B^{-1}) = \det(A)$

☐ $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = 0$ ☐ $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n-1$ ☒ $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) \leq n-1$

☐ $\det(A+C) = \det(A)+\det(C)$ ☐ $\det(\lambda A) = \lambda\det(A)$ ☒ $\det(A*B) = \det(B*A)$ (/4)

Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem)

Ermitteln Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems: (/5)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 13 \\
-x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -7 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 5 \\
-2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & -7
\end{array}$$

Tausch Zeile 1 nach unten (kleineres Pivotelement!)

$$\begin{array}{r}
\\ 2* \\ -2* \\ +3*
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & -2 & 5 & -7 \\
2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\
-2 & 3 & -1 & 4 & -7 \\
3 & -2 & 4 & -1 & 13
\end{array}\right)$$

← Je Tableau 1 Punkt

$\downarrow$

$$\begin{array}{r}
\\ \\ +5* \\ +4*
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & -2 & 5 & -7 \\
0 & 5 & -2 & 7 & -9 \\
0 & -1 & 3 & -6 & 7 \\
0 & 4 & -2 & 14 & -8
\end{array}\right)$$

Interpretation der Lösung 2 Punkte

$\downarrow$

$$\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & -2 & 5 & -7 \\
0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\
0 & -1 & 3 & -6 & 7 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2
\end{array}\right)$$

Aus II folgt $x_4 = 0$

" IV " $x_3 = 2$

" III " $-x_2 = 7 - 3x_3 + 6x_4$

$\Rightarrow x_2 = -1$

" I " $-x_1 = -7 - 2x_2 + 2x_3 - 5$

$\Rightarrow x_1 = 1$

Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter)

Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem (/8)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 3 \\ 3x_1 + (4-a)x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Gleichungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & 4-a & 1 \end{pmatrix}$

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen?
c) genau eine Lösung?
d) Man berechne die Lösungen in den Fällen b) und c)

2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 3 & 4-a & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2* \\ -3* \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 1-a & -2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a(a-3) & a \end{array}\right)$$

Rangabfall der Matrix A für $a=0$ und $a=3$

(1) a) Bei $a=0$ keine Lösung da $2 = \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A,b) =$

(1) b) Bei $a=3$ unendlich viele Lösungen (einparametrige Lösungsmenge

da $2 = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A,b$

(1) c) Bei $a \neq 0$ und $a \neq 3$ genau eine Lösung, da

$3 = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A,b$

(2) d) Lösung Fall b:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x_3 = \sigma$
$x_2 = 1 - \sigma$
$x_1 = 1 - x_2 - \sigma = 1-(1-\sigma)-\sigma = 0$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma$

---

(1) Lösung Fall c: Wegen $a \neq 3$ dividieren durch $a-3$ möglich:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$x_3 = \frac{1}{a}$
$x_2 = 1-(a-2)x_3 = \frac{2}{a}$
$x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \frac{2}{a} - \frac{1}{a} = 1 - \frac{3}{a}$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{2}{a} \\ 1-\frac{3}{a} \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: (Matrizengleichung)

Es gelte die Gleichung: $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (/3)

Gesucht ist eine daraus folgende Beziehung zwischen x und y.

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & yx \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 2$$

Elementweise Gleichheit liefert $x \cdot y = 4$ bzw $\boxed{y = \frac{4}{x}}$ 1

Aufgabe 5: (Berechnung der inversen Matrix)

Gesucht ist die inverse Matrix D^{-1} der gegebenen Matrix D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ (/6)

α) Lösung mit adjungierter Matrix, Minoren 2

$$-\det(D) \underset{\text{Sarrus}}{=} 6 + 0 + 0 - 8 - 0 - 0 = \underline{\underline{-2}}$$

$$-D^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad 4$$

oder

β) mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\times \text{(1. Zeile)} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{2. mal } \frac{1}{2} \\ +\frac{5}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3,\ +2 \\ \\ \text{2. mal } -1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{5}{2} & -1 \end{array}\right)$$

4 Rechn.

Schluß

Aufgabe 6: (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A. (/5)

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda) - 2(2-\lambda) =$$

$$(2-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-2) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2,$$

also $\lambda_{1/3} = 2$ doppelte Nullstelle.

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ_1 und $\lambda_2 \neq \lambda_1$. (/6)

$\lambda_2 = -1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ $\quad \Rightarrow EV_{\lambda_2} = \sigma \cdot ($

Aus der zweiten Gleichung folgt $x_2 = 0$.

Aus der ersten oder dritten Gleichung folgt $x_1 = -2x_3$ $\quad$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$

$\lambda_{1/3} = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $x_1 = x_3$

" " ersten " " $2x_1 = x_2 + 2x_3$.

$\Rightarrow 2x_1 = x_2 + 2x_1 \Rightarrow x_2 = 0$

$\Rightarrow EV_{\lambda_{1/3}} = \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der Eigenraum ist also nur eindimensional

mit $\tau \in \mathbb{R}$ $\quad$ – 5 –