achhochschule München **Fachbereich 03 FA** **SS 2004**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik
für Wiederholer und Nachholer

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl, Warendorf
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte:**	(/ ~~50~~ 42)
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**	
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**	

Aufgabe 1: (Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix max = 10 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

(/10)

$$= (1-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(-\lambda) + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 0 - 0 - 0 - (-\lambda)\cdot 2\cdot 2$$

Sarrus

$$= (1-\lambda)\cdot\lambda^2 - 4 + 4\lambda = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2-4) \quad 1$$

$$\det(A-\lambda E) = 0 \quad \text{für } \lambda_1 = 1 \ (1) \quad \text{und } \lambda_2 = 2 \ (1), \quad \lambda_3 = -2 \ (1)$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1) \quad \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = 0 \\ \text{und } 2x_1 = x_3 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = \sigma \\ x_3 = 2\sigma \end{matrix} \quad EV_{\lambda_1} = \sigma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ (1)$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1) \quad \left.\begin{matrix} 2x_2 = x_1 \\ x_1 = x_3 \end{matrix}\right\} x_2 = \tau \quad EV_{\lambda_2} = \tau\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (1)$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1) \quad \left.\begin{matrix} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 \\ x_1 = -x_3 \end{matrix}\right\} x_3 = 2\mu \quad E_{\lambda_3} = \mu\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ (1)$$

Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem, max = ~~6~~ 7 Punkte)

Ermitteln Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems: (7/~~5~~)

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 12 \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & \cancel{-1}\ -5 \\
3x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 11
\end{array}
$$

$-2*$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 3 & -1 & 1 & 7 \\
2 & -1 & +2 & -3 & 12 \\
-1 & 2 & 2 & 2 & -5 \\
3 & -5 & -3 & -1 & 11
\end{array}\right)
$$

$\downarrow$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 3 & -1 & 1 & 7 \\
0 & -7 & 4 & -5 & -2 \\
0 & 5 & 1 & 3 & 2 \\
0 & -14 & 0 & -4 & -10 \\
0 & -7 & 0 & -2 & -5
\end{array}\right)
$$

-1 1 /: 2

$\downarrow$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 3 & -1 & 1 & 7 \\
0 & -7 & 4 & -5 & -2 \\
0 & 0 & 27 & -4 & 4 \\
0 & 0 & -4 & 3 & -3
\end{array}\right)
$$

1 $\Leftarrow$ 5 * 2. Zeile + 7 . 3. Zeile

$\downarrow$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 3 & -1 & 1 & 7 \\
0 & -7 & 4 & -5 & -2 \\
0 & 0 & 27 & -4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 67 & -67
\end{array}\right)
$$

1 $\Leftarrow$ 4 * 3. Zeile + 27 * 4. Zeile

$\boxed{x_4 = -1}$ 1

$27x_3 - 4 \cdot (-1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 27x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$ 1

$-7x_2 + 5 = -2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$ 1 , $x_1 = 7 - 3x_2 + x_3 - x_4 =$ 1

fgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter max = 8 Punkte)

Für welche Werte des reellen Parameters α besitzt das lineare Gleichungssystem (/8)

$$\begin{aligned} x_1 \; - \qquad\quad x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \alpha x_2 - 8x_3 &= \alpha - 2 \\ \alpha x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen?
c) genau eine Lösung?
d) Man berechne die Lösungen in den Fällen b) und c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & -8 & \alpha-2 \\ \alpha & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad -2,\; -\alpha$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -6 & \alpha-2 \\ 0 & -2 & 4+\alpha & 0 \end{array}\right) \quad (1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4+\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -6 & \alpha-2 \end{array}\right) \quad (1) \qquad \tfrac{\alpha}{2}+$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -6+\frac{\alpha}{2}(4+\alpha) & \alpha-2 \end{array}\right) \quad (1)$$

c) $\alpha \neq 2$ und $\alpha \neq -6$)
$\Rightarrow$ genau eine Lösung

d): zu b) folgt mit $\alpha = 2$

$x_1 = x_3$
$-2x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
$x_2 = 3x_3$ (1)

zu c; für $\alpha \neq +2$, $\alpha \neq -6$ folgt

$$\left[-6 + \frac{\alpha}{2}(4+\alpha)\right] x_3 = \alpha - 2$$

$$\frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha+6)\, x_3 = \alpha - 2$$

$$x_3 = \frac{2}{\alpha+6}$$

$$-2x_2 = -(4+\alpha)\cdot x_3$$

Lösung zu c) $\boxed{x_2 = \frac{(4+\alpha)2}{2(6+\alpha)} = \frac{4+\alpha}{6+\alpha}}$

$\boxed{x_1 = x_3 = \frac{2}{\alpha+6}}$ (2)

b) $\alpha = 2 \Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ ~~genau eine Lösung~~ (1)

unendl. viele Lösungen, einp. lösungsscher

a) $-12 + \alpha(4+\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow \alpha_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2}$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -6$

wegen $\text{Rang}(A,b) = 3 \neq \text{Rang}(A)$ keine Lösung (1)

Aufgabe 4: (Berechnung der inversen Matrix max = 5 Punkte)

Gesucht ist die inverse Matrix D^{-1} der gegebenen Matrix D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ (/5)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \frac{1}{2}$$

1

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \frac{2}{5}$$

1

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

1

$$\boxed{D^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

2

Alternativ: Minoren

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \Sigma = 5$$

und

$\alpha_{11} = 2$

$\alpha_{12} = (-1)\cdot(-4)$

$\alpha_{13} = 0$

$\alpha_{21} = (-1)(-1)$

$\alpha_{22} = -2$

$\alpha_{23} = 0$

$\alpha_{31} = 2$

$\alpha_{32} = (-1)\cdot(+1)$

$\alpha_{33} = -1-4 = -5$

jeder richtige Minor $\frac{1}{2}$ Punkt

FGABE 6 NUR FÜR ZWEITSEMESTER !!!!!!

Aufgabe ~~6~~ 5: (Hauptachsentransformation max = ~~11~~ 12) -1 für Studenten im 1. Fachsemester

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$5x_1^2 + 12x_1x_2 - 36 = 0$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel). (Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.) (/8)

Die Gleichungsmatrix der Quadrik ist

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad 1, \qquad \text{Quadrik} \quad x^T \cdot A x = 36$$

EW von A:
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot(-36)}}{2} \quad 1$$

$$= \frac{5 \pm 13}{2} \qquad \underline{\lambda_1 = 9, \ \lambda_2 = -4} \quad 1$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 9$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{matrix} 4x_1 = 6x_2 \\ 2x_1 = 3x_2 \end{matrix} \qquad EV_{\lambda_1} = 6 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 1$$

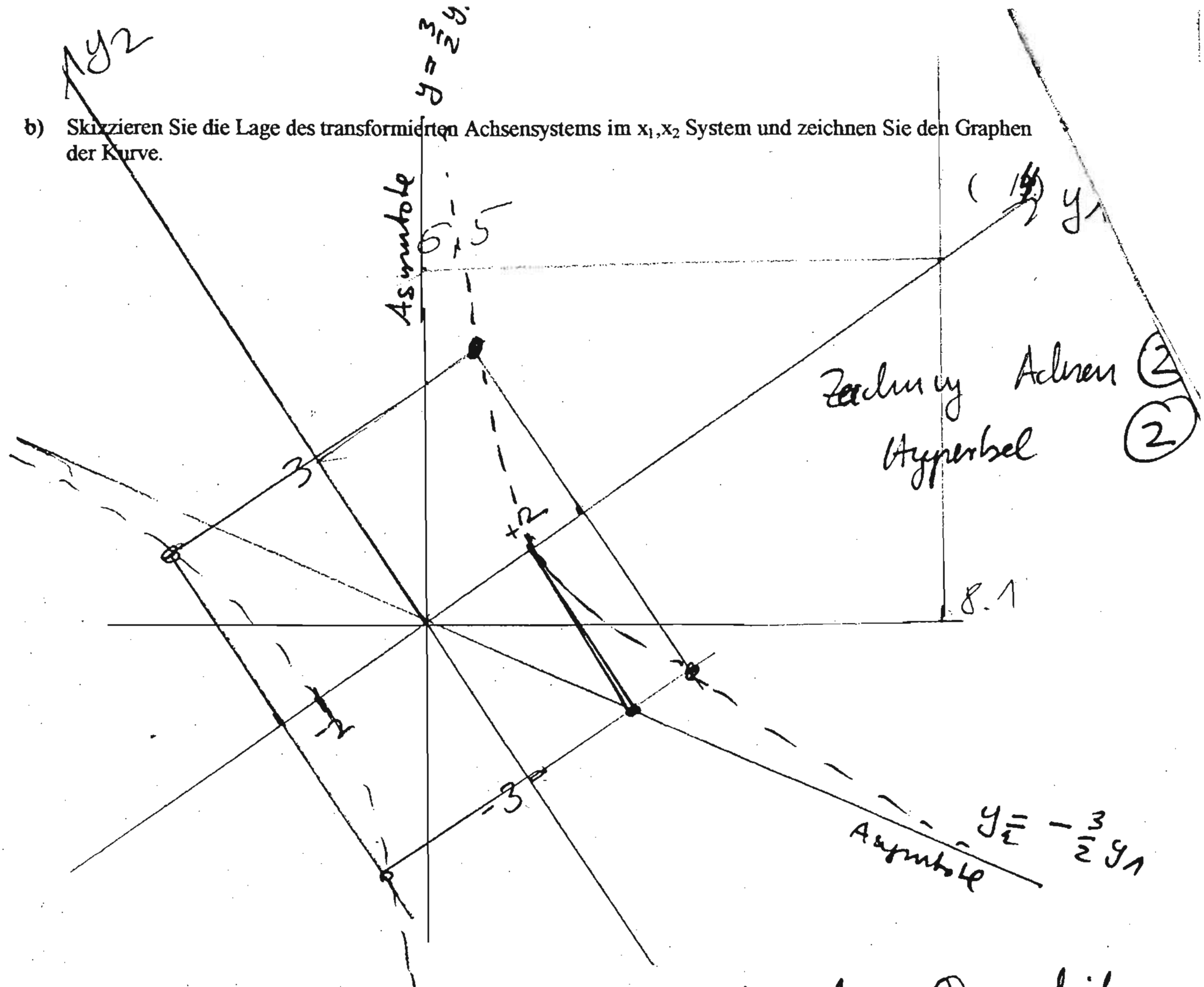
normiert $\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8321 \\ 0.5547 \end{pmatrix}$ 1

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -4$ senkrecht zu EV_{λ_1} oder

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & +4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \to E_{\lambda_2} = \tau \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 1, \quad \text{normiert } \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 1$$

wegen $\det \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{vmatrix} = \frac{9+4}{13} = 1$ ist das Achsensystem mit diesen EV rechts orientiert. 1

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.



In diesem Achsensystem hat die Quadrik die Gleichung (Transf. $x = B \cdot y$, mit $B = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$)

$\Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, also

$y^T \Lambda y = 36$ mit

1

$$9y_1^2 - 4y_2^2 = 36 \quad /:36$$

1

$$\frac{y_1^2}{2^2} - \frac{y_2^2}{3^2} = 1 \quad \underline{\text{Hyperbel}}$$

Wertetabelle		
y_2	0	± 3
y_1	± 2	$\pm\sqrt{8}$ $= 2{,}828\ldots$

Oder: Asymptoten haben Steigung $\pm \frac{b}{a}$ mit $b = 3$ und $a = 2$

$\Rightarrow \boxed{y_2 = \pm \frac{3}{2} y_1}$

be 5_2 : (Lineares Gleichungssystem, max = 12 Punkte)

nitteln Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems: (/5)

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -7 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -9 \\
 & & -4x_2 & + & x_3 & & & = & -5
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -3 & 2 & -1 & -7 \\
1 & -2 & 1 & -3 & -9 \\
0 & -4 & 1 & 0 & -5
\end{array}\right)
$$

$\downarrow$

1

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -3 & 2 & -1 & -7 \\
0 & -1 & 0 & -5 & -11 \\
0 & -4 & 1 & 0 & -5
\end{array}\right)
$$

2* 2. Zeile − 1. Zeile

$\cdot 4$

$\downarrow$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -3 & 2 & -1 & -7 \\
0 & +1 & 0 & 5 & 11 \\
0 & 0 & 1 & 20 & 39
\end{array}\right)
$$

1

1

$x_4 = \lambda \Rightarrow x_3 = 39 - 20\lambda$ 2

$x_2 = 11 - 5\lambda$ 2

$2x_1 = -7 + 3x_2 - 2x_3 + x_4$

$= -7 + 3(11 - 5\lambda) - 2(39 - 20\lambda) + \lambda$

$= -52 + 26\lambda \Rightarrow x_1 = -26 + 13\lambda$ 2

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -26 \\ 11 \\ 39 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 3