FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 F. SS 2005

VORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, nichtprogrammierbare Taschenrechner
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl, Schlamp, Selting, Warendorf

Name:	Geb.-Datum:	Punkte:
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Matrikelnummer:		
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: **(ca. 6 Punkte)**

Falls möglich berechne man die Inversen von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Lösung $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ des linearen Matrix-Gleichungssystems $A \cdot X = B$.

- $\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ invertierbar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\det(B) = 0$ da $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d.h. Spalten linear abh.

$\Rightarrow B$ nicht invertierbar

- $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Punkteschema für Prüfung

Mathematik 1, SS 2005

Punkte	Note
40, 39, 38, 37	1.0
36, 35	1.3
34, 33	1.7
32, 31	2.0
30, 29	2.3
28, 27	2.7
26, 25	3.0
24, 23	3.3
22, 21, 20	3.7
19, 18, 17, 16	4.0
0–15	5.0

Bei …,5 Pkt. wird auf-gerundet

Fortsetzung Aufgabe 2

a) keine Lösung, falls $Rg(A) < Rg(A|b)$

d.h. für $\boxed{\alpha = -2}$

b) unendlich viele Lösungen, falls $Rg(A) = Rg(A|b) < 3$

d.h. für $\boxed{\alpha = 1}$

c) genau eine Lsg für $\alpha \notin \{-2, +1\}$

d) für b) d.h. $\alpha = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \quad \begin{array}{l} x_2 = 4 - 5x_3 \\ x_1 = 5 - 3x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ +1 \end{pmatrix}$$

für c) mit $\alpha = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= \tfrac{1}{2} \\ x_2 &= -\tfrac{1}{2} \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}\left(6 \cancel{+} \tfrac{1}{2}_{3} + \tfrac{1}{2}\right) = \cancel{3}\ 5/2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: **(ca. 7 Punkte)**
Für welche Werte de Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - \quad x_2 + \quad x_3 &= 6 \\ x_1 - \alpha x_2 - 2x_3 &= \alpha \\ -3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 &= -7 \end{aligned}$$

(a) keine Lösung?

(b) unendlich viele Lösungen?

(c) genau eine Lösung?

(d) Man berechne die Lösungen in den Fällen (b) und (c). Setzen Sie bei der Lösung von (c) den Parameter $\alpha = 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -\alpha & -2 & \alpha \\ -3 & 2 & \alpha & -7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} (ii)': \ 2\cdot(ii) - (i) \\ (iii)': \ 3\cdot(i) + 2\cdot(ii) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2\alpha+1 & -5 & 2\alpha-6 \\ 0 & 1 & 3+2\alpha & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} (ii)': \ -(ii) \\ (iii)': \ (ii) + (2\alpha-1)\cdot(iii) \end{array}$$

- für $\alpha \neq \frac{1}{2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2\alpha-1 & 5 & 2(3-\alpha) \\ 0 & 0 & -5+(3+2\alpha)\cdot(2\alpha-1) & 2\alpha-6+4(2\alpha-1) \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

NR: $-5 + (3+2\alpha)(2\alpha-1) = -5 + 6\alpha - 3 + 4\alpha^2 - 2\alpha = 4(\alpha^2+\alpha-2)$
$= 4(\alpha+2)(\alpha-1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2\alpha-1 & 5 & 2(3-\alpha) \\ 0 & 0 & 2(\alpha+2)(\alpha-1) & 5(\alpha-1) \end{array}\right)$$

- für $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \text{genau eine Lsg}$$

Aufgabe 3: (ca. ~~xx~~ 5 Punkte)

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ \cancel{6}5 \end{pmatrix}$.

(a) Für welche Werte von α sind die drei Vektoren linear unabhängig?

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 4 \\ \alpha & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = -5\alpha^2 + 22\alpha - 21 \neq 0$$

$\Rightarrow$ lin. unabhängig für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$

2

mit $\alpha_{1/2} = \frac{22 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{22 \pm 8}{10}$

$\Rightarrow \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = \frac{7}{5}$

(b) Für welche Werte von α sind die drei Vektoren linear abhängig?

Wie läßt sich in diesem Fall der Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ \cancel{6}5 \end{pmatrix}$ durch die beiden anderen Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ darstellen ?

linear abhängig für $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha = \alpha_2$ (siehe (a))

1. Fall: $\alpha = \alpha_1 = 3$

1 $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$

2. Fall $\alpha = \alpha_2 = \frac{7}{5}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{z} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 7/5 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 7/5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2 $\quad$ mit $C_1 = 25, \quad C_2 = -15$

$\Rightarrow \vec{z} = 25 \cdot \vec{x} - 15 \vec{y}$

Aufgabe 4: (ca. ~~xx~~ 5 Punkte)

Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\chi(A) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)\cdot(1-\lambda)-8\right]$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5)$$

$$= 0$$

2

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 5$

Eigenvektoren zu

- $\underline{\lambda_1 = -1}$: $\quad (A - \lambda_1 I)\vec{x} = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad 1$$

- $\underline{\lambda_2 = 2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad 1$$

- $\underline{\lambda_3 = 5}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{x}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ①

Aufgabe 5: (ca. ~~xx~~ 17 Punkte)

Gegeben ist die Gleich[illegible] eines Kegelschnitts im Koordinatensystem x_1, x_2.

$$\vec{x}^T A\,\vec{x} + \vec{b}^T\,\vec{x} + c = 0 \qquad (1)$$

mit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{b} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\quad c = 31$

Geben Sie die Gleichung der Standardform des Kegelschnitts an und zeichnen Sie den Kegelschnitt im Ausgangskoordinatensystem x_1, x_2.
(Hinweis: die einzelnen Konstruktionsschritte der Zeichnung (=Hilfskoordinatensysteme) sollen erkennbar sein!)

- Eigenwerte von A: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda - 9)(\lambda - 1)$ ②

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 9$

- Eigenvektoren: $(A - \lambda_i I)\,\vec{x}_{\lambda_i} = \vec{0}$

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \vec{x}_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ①

$\underline{\lambda_2 = 9}$: $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \vec{x}_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ①

- Koordinatenwechsel $\vec{x} = S \cdot \vec{y}$

mit Drehmatrix $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ①, $\det(S) = 1$ ①

- Hauptachsentransformation:

$$(y_1\ y_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} + (-\sqrt{2})(20,16)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} + 31 = 0$$

$$y_1^2 + 9y_2^2 - 4y_1 - 36y_2 + 31 = 0$$

2

- quadratische Ergänzung:

$$(y_1^2 - 4y_1 + 4) - 4 + 9(y_2^2 - 4y_2 + 4) - 9\cdot 4 + 31 = 0$$

$$(\underbrace{y_1 - 2}_{=:z_1})^2 + 9(\underbrace{y_2 - 2}_{=:z_2})^2 - 9 = 0$$

Verschiebung $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}y_1 - 2\\ y_2 - 2\end{pmatrix}$ 2

- Quadrik nach Verschiebung:

$$\frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Ellipse}$$

1