Aufgabe 1 (Koordinatentransformation) (/)

Ein Achsensytem wird zunächst um die z-Achse um Pi/6 = 30 Grad gedreht, das sich so erbende Achsensystem, sei das Achsensystem M1.
Anschließend wird M1 um seine x Achese um
- Pi/4 = - 45 Grad gedreht, es ergibt sich das Achsensystem M2.
Welche Koordinaten hat der Punkt (10,10,5) in den Sytemen M1 und M2 ?

```
> restart;
>
> with (LinearAlgebra):
>
>
> A := Matrix([[1,0,0],[0,cos(alpha),sin(alpha)],[0, -sin(alpha),cos(alpha)]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```
> B := Matrix([[cos(beta),sin(beta),0],[-sin(beta),cos(beta),0],[0, 0,1]]);
>
```

$$B := \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> v := Vector(3,[10,10,5]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> beta :=Pi/6;
```

$$\beta := \frac{1}{6}\pi$$

```
> M1 := evalf(B);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0. \\ -.5000000000 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{bmatrix}$$

```
> M1 := Matrix([[1/2*3^(1/2), 1/2,0], [-.5000000000, 1/2*3^(1/2),
0], [0.,0.,1.]]);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -.5000000000 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0. & 0. & 1. \end{bmatrix}$$

```
> P1 := MatrixVectorMultiply(M1,v);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} 5\sqrt{3}+5 \\ -5.000000000+5\sqrt{3} \\ 5. \end{bmatrix}$$

```
> evalf(P1);
```

$$\begin{bmatrix} 13.66025404 \\ 3.660254040 \\ 5. \end{bmatrix}$$

```
> M2 := MatrixMatrixMultiply(A,B);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```
>
```

> alpha := -Pi/4;beta := Pi/6;

$$\alpha := -\frac{1}{4}\pi$$

$$\beta := \frac{1}{6}\pi$$

```
> M2 := evalf(M2);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0. \\ -0.2500000000\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & 0.2500000000\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

```
> v := Vector(3,[10,10,5]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> M4;
```

$$M4$$

```
> M2 := Matrix([[1/2*3^(1/2), 1/2, 0], [-1/4*2^(1/2),
1/4*3^(1/2)*2^(1/2), -1/2*2^(1/2)], [-1/4*2^(1/2),
1/4*2^(1/2)*3^(1/2), 1/2*2^(1/2)]]);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

```
> P2 := MatrixVectorMultiply(M2,v);
```

$$P2 := \begin{bmatrix} 5\sqrt{3}+5 \\ -5\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
> evalf(P2);
```

$$\begin{bmatrix} 13.66025404 \\ -.947343452 \\ 6.123724358 \end{bmatrix}$$

```
> restart;
>
>
```

Aufgabe 2: Inverse Matrix, Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalänlichkeit. (/)

Man berechne zu der Matrix

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

die inverse Matrix.

b) Man zeige, dass lambda = 1 ein Eigenwwert der Matrix ist, un berechne
die anderen zwei Eigenwerte der Matrix.

c) Geben Sie die Eigenwerte der inversen Matrix an!

d) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix. Wieviel gibt es?

d) Warum ist die Matrix A nicht diagonalähnlich? Geben Sie eine kurze Begründung an!

```
>
>
> A := Matrix([[1,0,0],[2,3,4],[1,0,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> R0 := LinearAlgebra:-MatrixInverse(Matrix(%id = 22022316));
```

$$R0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-4}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> R3 := LinearAlgebra:-Eigenvectors(Matrix(%id = 22022316));
```

$$R3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> R2 := LinearAlgebra:-Eigenvalues(Matrix(%id = 22022316));
```

$$R2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> R1 := LinearAlgebra:-CharacteristicPolynomial(Matrix(%id =
22022316),`tools/genglobal`[0]('x'));
```

$$R1 := x2^3 - 5\,x2^2 + 7\,x2 - 3$$

```
> R0 := LinearAlgebra:-MatrixInverse(Matrix(%id = 22022316));
```

$$R0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-4}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte der inversen Matrix:

```
> R4 := LinearAlgebra:-Eigenvalues(Matrix(%id = 19915492));
```

$$R4 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 Lineares Gleichungssystem mit Parameter (/)

Ermitteln sie die Lösung des linearen Gleichungssystems mit Parameter a :

3x1 + 2x2 + x3 = 3
5x1 + 4x2 + 2x3 = 5
x1 +ax2 -2x3 = 4

Für welchen Wert von a gibt es keine Lösung ? Warun ?

```
> restart;with (LinearAlgebra):
> G := Matrix([[3,2,1],[5,4,2],[1,-4,-2]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> R0 := LinearAlgebra:-Rank(Matrix(%id = 19749176));
```

$$R0 := 2$$

```
> G := Matrix([[3,2,1],[5,4,2],[1,a,-2]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}$$

```
> v := Vector(3,[3,5,4]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> L:=GenerateEquations( G,[x1,x2,x3],<v[1],v[2],v[3]>);
```

$$L := [3\,x1 + 2\,x2 + x3 = 3,\, 5\,x1 + 4\,x2 + 2\,x3 = 5,\, x1 + a\,x2 - 2\,x3 = 4]$$

```
> eqns := {L[1],L[2],L[3]};
```

$$eqns := \{3\,x1 + 2\,x2 + x3 = 3,\, 5\,x1 + 4\,x2 + 2\,x3 = 5,\, x1 + a\,x2 - 2\,x3 = 4\}$$

```
> sols := solve( eqns ,{x1,x2,x3});
```

$$sols := \left\{ x1 = 1,\, x2 = \frac{3}{a+4},\, x3 = -\frac{6}{a+4} \right\}$$

```
>
```

Keine Lösung für a = -4, hier ist der Rang der Matrix =2, der erweiterten Matrix aber = 3.

Aufgabe 4: Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit. (/)

Gegeben sind die 3 Vektoren

$$a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} 2 \\ x \\ 5 \end{matrix} \qquad c = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$$

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die 3 Vektoren Liear abhhängig sind
und geben Sie für dieses x die Darstellung des Vektors a durch b und c in der
Form a = v*b + w* c mit Konstanten v und w an !

```
> restart;with (LinearAlgebra):
> G := Matrix([[1,2,2],[2,x,1],[5,5,4]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> R0 := LinearAlgebra:-Determinant(Matrix(%id = 20606080));
```

$$R0 := -6\,x + 9$$

Für x = 3/2 sind die Vekrtoren linear abhängig.

```
> G := Matrix([[2,2],[3/2,1],[5,4]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> d := Vector(3,[1,2,5]);
```

$$d := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> L:=GenerateEquations( G,[v,w],<d[1],d[2],d[3]>);
```

$$L := \left[2\,v + 2\,w = 1, \frac{3}{2}v + w = 2, 5\,v + 4\,w = 5 \right]$$

```
> eqns := {L[1],L[2],L[3]};
```

$$eqns := \left\{ 2\,v + 2\,w = 1, \frac{3}{2}v + w = 2, 5\,v + 4\,w = 5 \right\}$$

```
> sols := solve( eqns ,{v,w});
```

$$sols := \left\{ v = 3, w = \frac{-5}{2} \right\}$$

Also a = 3*b - (5/2)*c

```
>
```