15,5 ≤ 4,0
19,5 ≤ 3,7
22,5 ≤ 3,3

24,5 ≤ 3,0
26,5 ≤ 2,7
28,5 ≤ 2,3

30,5 ≤ 2,0
32,5 ≤ 1,7
34,5 ≤ 1,3
36,5 ≤ 1,0

Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **SS 2007**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Pöschl, Warendorf, Kloster

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!
(Ausnahme: Aufgabe 1, wo die richtige Angabe genügt.)

Name: **Geb. – Datum** **Punkte:** (/ 40)

Vorname: **Stud.- Gruppe** **Korr:**

Raum/Platz-Nr: **Aufsicht:** **Note:**

Aufgabe 1: (Matrizen- und Vektorrechnung, Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen, lineare Gleichungssysteme **(/4)**
(Jedes richtige Kreuz ergibt 1/2 Punkt, jedes falsche 1/2 Punkt Abzug, bei negativen Werten werden 0 Punkte eintragen)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Welche der nachstehenden Aussagen sind richtig (bitte ankreuzen):

☐ Die Determinante von A ist 1 ☒ Die Determinante von A ist 8
☐ Die Determinante von A ist 2 ☒ A hat den Eigenwert 1
☒ A hat den Eigenwert 2 ☐ A hat den Eigenwert 3
☐ Die Eigenvektoren von A sind linear abhängig
☒ Die Eigenvektoren von A sind linear unabhängig
☐ A^{-1} hat den Eigenwert ⅛
☒ A^{-1} hat den Eigenwert ½
☒ A ist invertierbar ☐ A ist singulär
☐ Spur(A) = 3 ☒ Spur(A) = 7 ☐ Spur(A) = 10

$A * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ hat ☒ genau eine Lösung ☐ keine Lösung ☐ unendlich viele Lösungen

Aufgabe 2 : (Lineare Abhängigkeit und Orthogonalität von Vektoren) (/7)

Gegeben sine die 3 Vektoren:

$$x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix}1\\2\\c\end{bmatrix}$$

a) Für welchen Wert sind x, y und z linear abhängig ? $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$ (/2)

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\2 & -1 & 2\\3 & 2 & c\end{vmatrix} = -c + 0 + \cancel{4} + 3 - 0 - \cancel{4} \stackrel{!}{=} 0 \quad 1$$

$$\boxed{c = 3} \quad 1$$

b) Berechnen Sie einen Vektor w, der orthogonal zu x und zu y ist. (/2)

$$\vec{w} = \vec{x} \times \vec{y} \quad 1$$

$$\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\1 & 2 & 3\\0 & -1 & 2\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 2 - 3\cdot(-1)\\3\cdot 0 - 1\cdot 2\\1\cdot(-1) - 0\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix} \quad 1$$

c) Man setzte c = 0 und bilde eine Matrix A mit den 3 Vektoren als Spalten und löse das lineare Gleichungssystem (/3)

$$A*x = \begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 4\\2 & -1 & 2 & 2\\3 & 2 & 0 & 3\end{array}\right) \quad |\cdot(-2)\ + \quad |\cdot(-3)\ +$$

$$1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 4\\0 & -1 & 0 & -6\\0 & 2 & -3 & -9\end{array}\right) \quad |\cdot 2\ +$$

$$1 \quad \Leftarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 4\\0 & 1 & 0 & 6\\0 & 0 & -3 & -21\end{array}\right) \begin{array}{l}\Rightarrow \boxed{x_2 = 6}\\ \Rightarrow \boxed{x_3 = 7}\end{array}$$

$$x_1 = 4 - x_3$$

$$\boxed{x_1 = -3}$$

1

$\boxed{\lambda_2 = 3}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0} \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_3} \\ 2x_2 = 0 \end{array}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1/2 1/2

$\boxed{\lambda_1 = 5}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 1

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2} \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = x_3} \end{array}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1/2 1/2

Aufgabe 3: (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix) (/10)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A. Der Rechenweg muss erkennbar sein! (/4)

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0 \quad = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -2 & 0 \\ -2 & (1-\lambda) & 2 \\ 0 & 2 & (3-\lambda) \end{vmatrix} =$$

1

$$0=(3-\lambda)^2(1-\lambda)+0+0-0-(-2)(-2)\cdot(3-\lambda)-2\cdot 2\cdot(3-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)\{(3-\lambda)(1-\lambda)-4-4\} = \underbrace{(3-\lambda)}_{\lambda_1}\{\underbrace{\lambda^2-4\lambda^2-5}\}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{+4\pm\sqrt{16-4(-5)}}{2}$$

$\boxed{\lambda_1 = 3}$ 1 $\boxed{\lambda_2 = 5}$ 1 $\boxed{\lambda_3 = -1}$ 1

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zu den jeweiligen Eigenwerten. in normierter Darstellung (Wenn Sie die Eigenwerte nicht ermitteln konnten, rechnen Sie in den weiteren Aufgaben mit $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ weiter): (/6)

$\boxed{\lambda_3 = -1}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 4x_1-2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 \\ -2x_1+2x_2+2x_3 = 0 \\ 2x_2+4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}x_2 = -x_1 \end{array}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1/2 1/2

$$\begin{vmatrix} 2 & 2\beta & 2\beta-2 \\ 1 & 2 & \beta+1 \\ 0 & 2-\beta & \beta+5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2)\ + \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2\beta & 2\beta-2 \\ 0 & 2\beta-4 & -4 \\ 0 & 2-\beta & \beta+5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left\{(2\beta-4)(\beta+5)-(-4)(2-\beta)\right\} \underset{1}{=} 2\left\{2\beta^2+2\beta-12\right\} \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_1 = 2} \qquad \boxed{\beta_2 = -3}$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

$\alpha_{11} = 10-2 = 8$; $\alpha_{12} = 5$; $\alpha_{13} = 2$; $\alpha_{21} = 4$; $\alpha_{22} = 10$; $\alpha_{23} = 4$;

$\alpha_{31} = 4$; $\alpha_{32} = 4$; $\alpha_{33} = 4$

$\det B = 20+0-4-0-0-4 = 12$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{21} & \alpha_{31} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{22} & -\alpha_{32} \\ \alpha_{13} & -\alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} +8 & -4 & 4 \\ -5 & 10 & -4 \\ +2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{12} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 : (Matrizenrechnung, inverse Matrix) (/10)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\beta & 2\beta-2 \\ 1 & 2 & \beta+1 \\ 0 & 2-\beta & \beta+5 \end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von β ist A invertierbar ? (/ 4)

$\det A \neq 0 \neq 2\cdot 2(\beta+5) + 0 + (2\beta-2)(2-\beta) - 0$

$1 \quad - 2(\beta+1)(2-\beta) - 2\beta(\beta+5) =$

$0 \neq 4\beta + 20 + 0 - 2\beta^2 + 2\beta + 4\beta - 4 - 4\beta - 4 + 2\beta^2 + 2\beta$

$- 2\beta^2 - 10\beta =$

$0 \neq -2\beta^2 - 2\beta + 12 \quad 1$

$\beta_{12} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-2)\cdot 12}}{2\cdot(-2)}$

$\boxed{\beta_1 = +2}$ 1

$\boxed{\beta_2 = -3}$ 1

b) Berechnen Sie B^{-1} für $\beta = 0$. (/ 6)

2	0	−2	1	0	0
1	2	1	0	1	0
0	2	5	0	0	1

1	0	−1	1/2	0	0
0	2	2	−1/2	1	0
0	2	5	0	0	1

2

1	0	−1	1/2	0	0
0	1	1	−1/4	1/2	0
0	0	3	1/2	−1	1

2

1	0	0	2/3	−1/3	1/3
0	1	0	−5/12	5/6	−1/3
0	0	1	1/6	−1/3	1/3

2

Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation): (/9)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$$2x_1^2 - 2\sqrt{2}\,x_1x_2 + 3x_2^2 - 9 = 0\,.$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel). (Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.)
Wie groß ist der Drehwinkel?

(/6)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

$$6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 4} \quad \boxed{\lambda_2 = 1}$$

$\boxed{\text{EV zu } \lambda_1 = 4}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0 \\ \rightsquigarrow x_2 = -\sqrt{2}x_1 \end{matrix}\right\} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{EV zu } \lambda_2 = 1}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0 \\ x_1 = \sqrt{2}x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ +1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

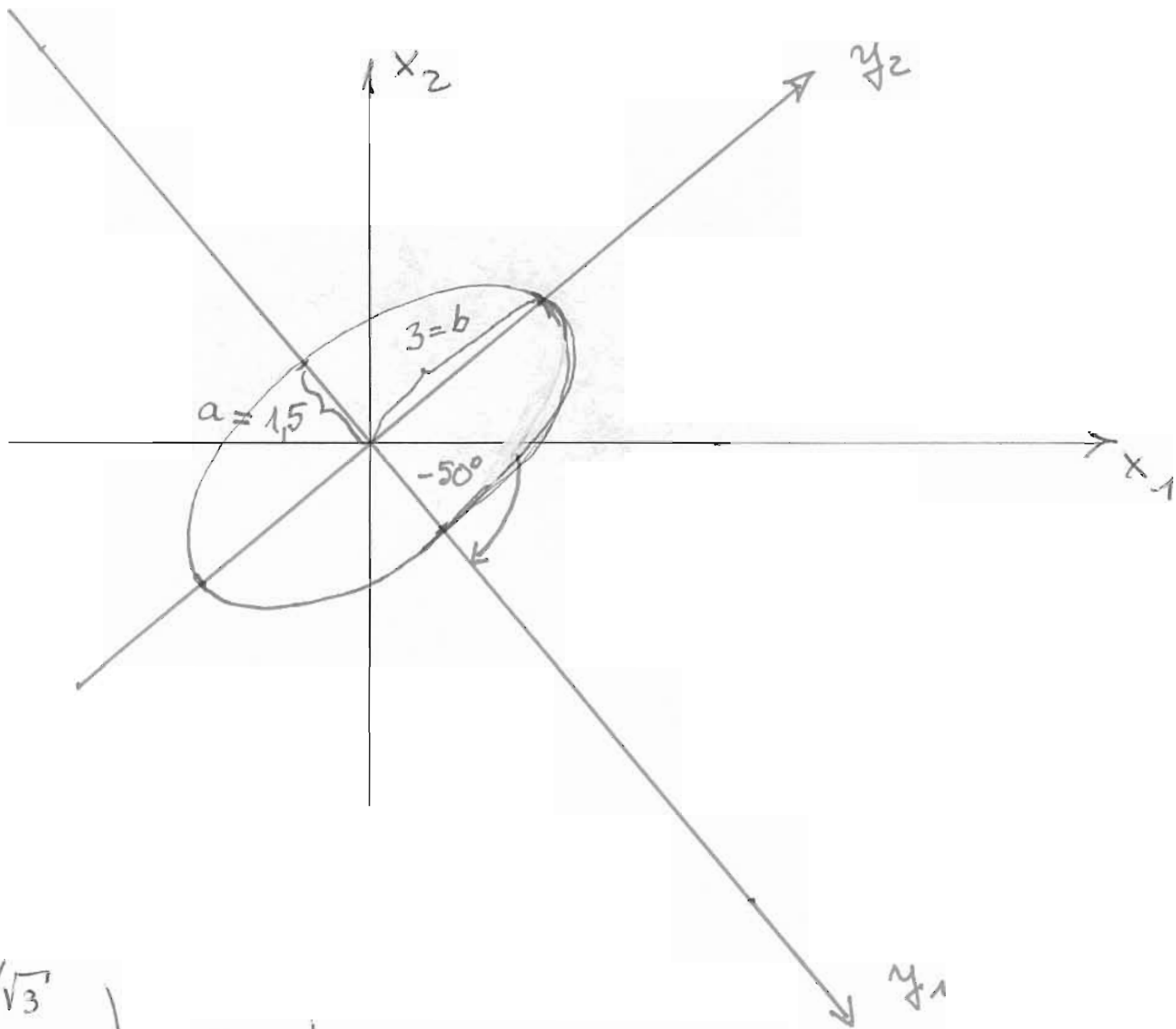
$$P = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = +1 \checkmark$$

$$\rightsquigarrow W = 4y_1^2 + 1y_2^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_1}{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{Ellipse mit } a = \frac{3}{2}; b = 3$$

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/3)



$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = -50°$$