Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **SS 2008**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Pöschl, Klöster

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!
(Ausnahme: Aufgabe 1, wo die richtige Angabe genügt.)

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte:** (/ 60)
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: Gleichungssystem mit Parameter (/ 12)

Für welche Werte des reellen Parameters α besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & \alpha x2 & & & & & = & 3 \\ x_1 & + & & & 2\alpha x_3 & + & x_4 & = & 5\alpha \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 1-2\alpha \\ -2x_1 & + & & & 4x_3 & + & \alpha x_4 & = & 2+\alpha \end{array}$$

a) unendlich viele Lösungen ?
b) keine Lösung ?
c) genau eine Lösung ?
d) Man berechne die Lösung für den Fall a) und für den Fall c) mit α = -1

Matrix A ⇒ det(A) (Entwicklung nach der 2. Spalte)

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= -\alpha\,(2\alpha - 4\alpha + 4 - 4) = +2\alpha^2$$

Freie Seite für Berechnungen zur Aufgabe 1

x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	α	0	0	3
1	0	2α	1	5α
0	0	2	1	$1-2\alpha$
-2	0	4	α	$2+\alpha$
1	α	0	0	3
0	$-\alpha$	2α	1	$5\alpha-3$
0	0	2	1	$1-2\alpha$
0	0	$4(1+\alpha)$	$2+\alpha$	$2+11\alpha$
1	α	0	0	3
0	$-\alpha$	2α	1	$5\alpha-3$
0	0	2	1	$1-2\alpha$
0	0	0	$*)$	$**)$

$|\cdot(-1)$ +

$|\cdot 2$ +

1

1

$|\cdot -2(1+\alpha)$ +

2

$*) = +2+\alpha-2-2\alpha = -\alpha$

$**) = -2+4\alpha-2\alpha+4\alpha^2+2+11\alpha$
$= 4\alpha^2+13\alpha$
$= \alpha(4\alpha+13)$

a) unendlich viele Lsgn für $\alpha = 0$ 1

$x_1 = 3$; $x_4 = -3$; $2x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow 2x_3 = 4 - x_4 = 7 \Rightarrow x_3 = 7/2$

x_2 beliebig

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 3

b) es existiert kein α, für welches das lin. GS 1
keine Lösung besitzt 1

c) genau eine Lösung für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) für $\alpha = -1 \Rightarrow x_4 = -9$; $x_3 = \frac{1}{2}(1+2+9) = 6$; $x_2 = -8+9+12 = 13$

$x_1 = 3 + 13 = 16$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$ 2

Aufgabe 2 : (Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalähnlichkeit)) (/14)

für jeden α_{ij} 1/2
für det A 1/2

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix. (/6)

$\det A = 2+0+0-0-3+3 = +2 \Rightarrow A^{-1}$ existiert

	1	3	0	1	0	0	$\cdot(-1)$ +
1	1	2	3	0	1	0	
	0	-1	1	0	0	1	
	1	3	0	1	0	0	
1	0	-1	3	-1	1	0	$\cdot(-1)$ +
	0	-1	1	0	0	1	
	1	3	0	1	0	0	
1	0	1	-3	1	-1	0	+
	0	0	-2	1	-1	1	$\cdot(-3/2)$
	1	3	0	1	0	0	+
1	0	1	0	$-1/2$	$+1/2$	$-3/2$	$\cdot(-3)$
	0	0	1	$-1/2$	$+1/2$	$-1/2$	

$\alpha_{11} = 2+3 = 5$

$\alpha_{12} = -(1-0) = -1$

$\alpha_{13} = -1$

$\alpha_{21} = -(3) = -3$

$\alpha_{22} = 1$

$\alpha_{23} = -(-1-0) = +1$

$\alpha_{31} = 9-0 = 9$

$\alpha_{32} = -(3-0) = -3$

$\alpha_{33} = 2-3 = -1$

(analog)

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix. (/4)

	1	0	0	$5/2$	$-3/2$	$+9/2$
1	0	1	0	$-1/2$	$+1/2$	$-3/2$
	0	0	1	$-1/2$	$+1/2$	$-1/2$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & +9 \\ -1 & +1 & -3 \\ -1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$ ✓

1

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 3\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}= \text{1}$$

$$=(1-\lambda)^2(2-\lambda)-3(1-\lambda)+3(1-\lambda)=(1-\lambda)^2(2-\lambda) \quad \text{1}$$

$\lambda_1=2$; $\lambda_2=\lambda_3=1$

1 1

(c) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix (/4)

(i) Eigenvektor zu $\lambda_1=2$

1/2

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}-x_1+3x_2=0 & \Rightarrow x_1=+3x_2\\ x_1+3x_3=0 & \\ -x_2-x_3=0 & \Rightarrow x_3=-x_2 \quad 1/2\end{matrix}$$

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}+3x_2\\x_2\\-x_2\end{pmatrix} \quad 1/2 \quad \Rightarrow \text{normiert} \quad \vec{n}_1=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}3\\+1\\-1\end{pmatrix} \quad 1/2$$

(ii) Eigenvektor zu $\lambda_2=1$

1/2

$$\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}3x_2=0 & \Rightarrow x_2=0 \quad 1/2\\ x_1+3x_3=0 & x_1=-3x_3\\ -x_2=0 & \end{matrix}$$

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-3x_3\\0\\x_3\end{pmatrix} \quad 1/2 \quad \Rightarrow \text{normiert} \quad \vec{n}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \quad 1/2$$

Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem) (/ 6)

Berechnen Sie die Lösung(en) des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
-x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\
-2x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & = & 5 \\
2x_1 & + & -3x_2 & + & 2x_3 & = & 2
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	RS
	-1	1	0	1
1	-2	2	1	5
	2	-3	2	2
	-1	1	0	1
1	0	0	+1	3
	0	-1	2	4
	+1	-1	0	-1
1	0	1	-2	-4
	0	0	1	+3

$| \cdot (-2)$ + $| \cdot (2)$ +

umtauschen

$\Rightarrow x_1 = -1 + x_2 = -1 + 2 = +1$

$\Rightarrow x_2 = -4 + 2 \cdot (+3) = 2$

$\Rightarrow x_3 = +3$

$x_1 = +1$ 1

$x_2 = +2$ 1

$x_3 = +3$ 1

oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ +2 \\ +3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: (Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit) (/10)

Gegeben sind die 3 Vektoren

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die beiden möglichen Werte des Parameters x so, dass die 3 Vektoren linear abhängig sind. (/5)

$$1 \quad \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & x \end{vmatrix} = x + 4x + 4 - 4 - 2x^2 - 2 \overset{!}{=} 0 \quad 1$$

$$0 = -2x^2 + 5x - 2 \quad 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm 3}{-4} = \begin{cases} x_1 = +\frac{1}{2} & 1 \\ x_2 = +2 & 1 \end{cases}$$

b) Ersetzen Sie nun x in den gegebenen Vektoren durch den ersten in a) gefundenen Wert. Wie lässt sich der Vektor $\vec{b}$ durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ mittels $\vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{c}$ darstellen? (/3)

Berechnen Sie die Parameter λ und μ !

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$1/2 \quad 2 = 1 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu$

$1/2 \quad 1 = 2 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \quad | \cdot (-1)$

$+ \Rightarrow \boxed{1 = -\lambda}$ $1/2$ eingesetzt in 1. Gl.

$\Downarrow$

$\boxed{\mu = 3}$ $1/2$

$1/2 \quad 2 = 4 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu$

(Gl. (3) ist 2x Gl. (1) $\Rightarrow$ entfällt)

$$\vec{b}_1 = -\vec{a}_1 + 3\vec{c}_1 \quad 1/2$$

c) Ersetzen Sie nun x in den gegebenen Vektoren durch den zweiten in a) gefundenen Wert. Wie lässt sich der Vektor $\vec{b}$ durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ mittels $\vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{c}$ darstellen? (/2)

Berechnen Sie die Parameter λ und μ !

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1/2 $\frac{1}{2} = 1 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \quad | \cdot (-1)$ +

1/2 $1 = 2 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu$

1/2 $2 = 4 \cdot \lambda + \frac{1}{2} \cdot \mu$

$\boxed{\frac{1}{2} = \lambda}$ $\quad 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 0}$

Kontrolle: $2 \overset{?}{=} 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0$

$2 = 2 + 0$ ✓

$\vec{b}_2 = \frac{1}{2}\vec{a}_2$ 1/2

Aufgabe 5: (Determinantenberechnung) (/ 6)

Gegeben sei die Matrix $B = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ a & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix als Funktion von a.
Für welches a hat B den Rang 2 , für welche a den Rang 3 ?

$\det(B) = 4a + \cancel{4a} + 6 - \cancel{4a} + 2 + 12a$ 1

$= 16a + 8 = 8(2a+1)$ 1

$\boxed{a = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \det(B) = 0 \Rightarrow Rg(B) = 2$ *) 1

$\boxed{a \neq -\frac{1}{2}} \Rightarrow \det(B) \neq 0$ für $a \neq -\frac{1}{2}$

1

$\Rightarrow Rg(B) = 3$ 1

*) weil die Unterdeterminante $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = +16 \neq$ 1

Aufgabe 6: (Hauptachsentransformation max = 12 Punkte)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$2x_1^2 + 23x_2^2 + 72x_1x_2 - 450 = 0$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel).

(Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.)

Geben Sie den Drehwinkel α und die Gleichung der Transformation von x_1x_2 ins gedrehte y_1y_2 System an! (/8)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & +36 \\ +36 & 23 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 36 \\ 36 & 23-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad 1/2$$

$$0 = (2-\lambda)(23-\lambda) - 36^2$$

$$0 = 46 - 23\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1296$$

$$0 = \lambda^2 - 25\lambda - 1250 \quad 1/2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+25 \pm \sqrt{625 + 4 \cdot 1250}}{2} = \frac{+25 \pm \sqrt{5625}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+25 \pm 75}{2} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = +50 \quad 1/2 \\ \lambda_2 = -25 \quad 1/2 \end{matrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = +50$

$1/2 \quad \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -48 & +36 \\ 36 & -27 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} -48x_{11} + 36x_{12} = 0 \\ 36x_{11} - 27x_{12} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{12} = \frac{48}{36} x_{11} = \frac{4}{3} x_{11} \quad 1/2$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \frac{4}{3}x_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{normiert} \quad 1/2$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad 1/2$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -25$

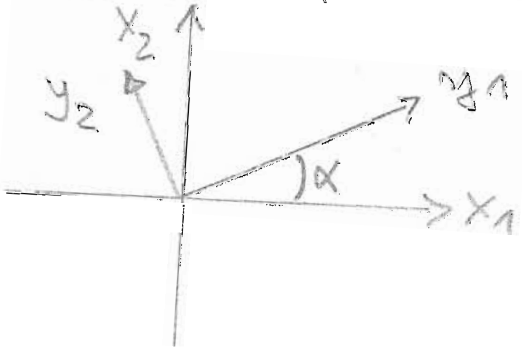
$1/2$ $\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 27 & 36 \\ 36 & 48 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} 27x_{21} + 36x_{22} = 0 \\ 36x_{21} + 48x_{22} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{21} = -\frac{4}{3}x_{22} \quad 1/2$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}x_{22} \\ x_{22} \end{pmatrix} \; 1/2 \Rightarrow \text{normiert} \quad n_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ +3/5 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

Transformationsmatrix $P = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$\det P = 0{,}6^2 - 0{,}8 \cdot (-0{,}8) = 0{,}36 + 0{,}64 = +1$ $1/2$



$$\tan\alpha = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1{,}33$$

$\alpha = 53{,}13°$ $1/2$

$$50y_1^2 - 25y_2^2 = 450$$

$$\frac{y_1^2}{9} - \frac{y_2^2}{18} = 1 \quad 1/2$$

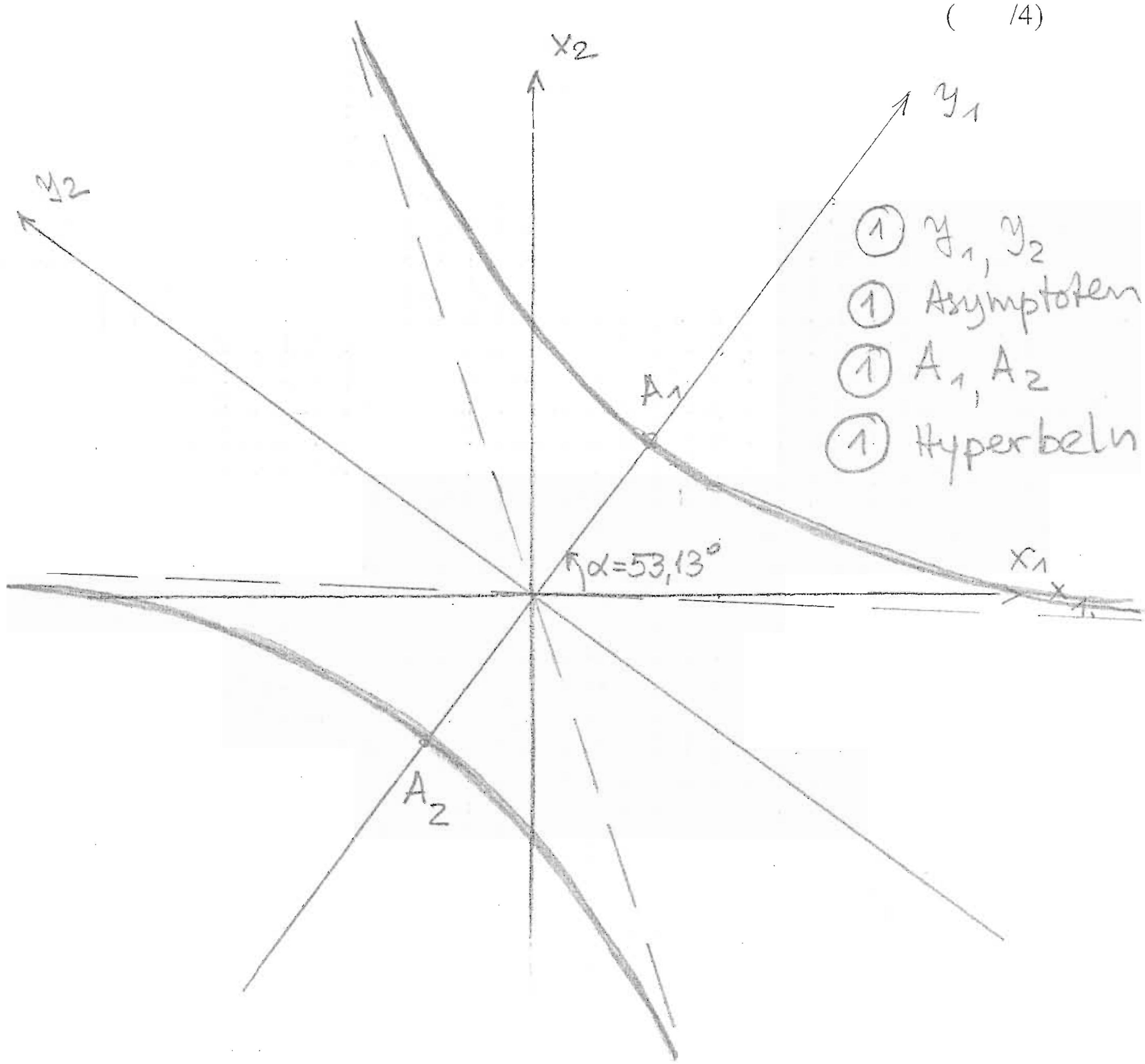
$$\left(\frac{y_1}{3}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Hyperbeln $1/2$

$a = 3$; $b = 3\sqrt{2}$

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/4)



1 y_1, y_2
1 Asymptoten
1 A_1, A_2
1 Hyperbeln

Asymptoten: $y_2 = \pm \frac{b}{a} y_1 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{3} y_1 = \pm\sqrt{2}\, y_1$

$\tan\beta = \sqrt{2} \Rightarrow \beta = 54{,}74°$

$y_2^A = 0 \Rightarrow y_1^A = \pm 3$

$A_1 = (y_1^A ; y_2^A) = (+3 ; 0)$

$A_2 = (-y_1^A ; y_2^A) = (-3 ; 0)$