Fachhochschule München **Fakultät 03 FA** **SS 2009**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Pöschl ,Warendorf
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name: **Geb. – Datum** **Punkte: (/ 42)**

(/ 40)

Vorname: **Stud.- Gruppe** **Korr:**

Raum/Platz-Nr: **Aufsicht:** **Note:**

Aufgabe 1: (Eigenwerte, Eigenvektoren von Matrizen max = 8 Punkte)
(/ 10)

a) Für die Matrix (/ 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zeige man, dass $\lambda_1 = 2$ ein Eigenwert ist und ermittle die Eigenwerte λ_2 und λ_3 .

$$\det(A-\lambda\cdot E)=\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 2 \\ 2 & (1-\lambda) & -2 \\ 1 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)-2+0-2(1-\lambda)-2(2-\lambda)\overset{!}{=}0 \quad \frac{1}{2}$$

für $\lambda=2$ verschwindet der erste u. der letzte Term, es verbleibt: $-2-2(1-2)=-2-2+4=0$ ✓
also $\lambda_1=2$ ist ein EW $\frac{1}{2}$

$$\det(A-\lambda E) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(2-\lambda) - 2(2-\lambda) =$$
$$= (2-\lambda)\left\{(1-\lambda)^2 - 2 - 2\right\} = (2-\lambda)\left\{1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4\right\} \quad 1/2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-3)}}{2} = \frac{+2 \pm 4}{2} \quad 1/2$$

$$\curvearrowright \lambda_2 = -1 \quad 1/2$$

$$\lambda_3 = +3 \quad 1/2$$

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den 3 Eigenwerten. (/ 6)

$\boxed{\text{Zu } \lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -2x_3} \quad 1/2$$
$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0} \quad 1/2$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \varkappa \quad 1/2$$

$\boxed{\text{Zu } \lambda_2 = -1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3 - 2x_1 = -2x_3 + 6x_3 \quad 1/2 \quad \boxed{x_2 = 4x_3}$$
$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -3x_3} \quad 1/2$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ +4 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \quad 1/2$$

$\boxed{\text{zu } \lambda_3 = 3}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 \qquad - x_3 = 0 \end{matrix}$$

1/2

$+) \; -2x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$ 1/2

$\Rightarrow \boxed{x_1 = x_3}$ 1/2

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nu$$ 1/2

c) Berechnen Sie auf möglichst einfache Weise nachstehende Summe zweier Determinanten (/ 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Lösung: Nutz man den Additionssatz für Determinanten, so Ergibt sich die Determinante der Matrix unter a); diese ist -6 (z.B. Produkt der Eigenwerte).

Wer diesen Satz nicht kennt oder nicht anwendet, berechnet die Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 2 - 1 = -1$$

1

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 3 + 0 - 1 - 2 - 0 = -5$$

$\det(A) + \det(B) = -6$

Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem, max = 6 Punkte)

Ermitteln Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems: (/6)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 1\\
x_1 - x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 2\\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RS	
	1	1	0	1	1	$\cdot(-1)$ +
1	1	-1	1	0	2	+
	1	1	-1	1	4	
	1	1	0	1	1	(*)
1	0	-2	1	-1	1	(**)
	0	0	-1	0	3	$\Rightarrow \boxed{x_3=-3}$ 1

Aus (**) mit $x_3=-3$ folgt

$$-2x_2 - x_4 = 1+3 = 4$$

$\boxed{x_4 = -4 - 2x_2}$ 1 $\qquad$ $\boxed{x_2 = -2 - \frac{1}{2}x_4}$

$\Downarrow$ aus (*) $\qquad$ $\Downarrow$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_4 = 1 - x_2 + 4 + 2x_2$$

$\boxed{x_1 = +5 + x_2}$ 1

$$x_1 = 1 - x_2 - x_4 = 1 + 2 + \frac{1}{2}x_4 - x_4$$

$\boxed{x_1 = +3 - \frac{1}{2}x_4}$ 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \varkappa \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$ 1 oder $$\vec{x} = \begin{pmatrix} +3 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 1

Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter max = 8 Punkte)

Für welche Werte des reellen Parameters α besitzt das lineare Gleichungssystem

(/8)

$$\begin{aligned} x_1 & & &+ x_3 &= 1 \\ 2x_1 &+ 3x_2 & &+ x_3 &= \alpha \\ x_1 &+ 2x_2 & &+ (1-\alpha)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen?
c) genau eine Lösung?
d) Man berechne die Lösung im Fall c) für α = 1.

	x_1	x_2	x_3	RS	
	1	0	1	1	$\mid \cdot (-2)$ +, $\mid \cdot (-1)$ +
	2	3	1	α	
	1	2	(1-α)	1	
	1	0	1	1	
1/2	0	3	-1	α-2	$\mid \cdot (-2)$ +
1/2	0	2	-α	0	$\mid \cdot 3$
	1	0	1	1	(***)
	0	3	-1	α-2	(**)
1/2	0	0	2-3α	4-2α	(*)

(a) keine Lsg: wenn $2-3\alpha=0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$ 1

(b) ∞-viele Lsgn: für kein α 1

(c) genau eine Lösung für $\boxed{\alpha \neq \frac{2}{3}}$ 1

(d) $\alpha = 1 \Rightarrow$ aus (*) $-x_3 = 2 \Rightarrow$ $\boxed{x_3 = -2}$ 1

1/2 " (**) $3x_2 - x_3 = -1 \Rightarrow$ $\boxed{x_2 = -1}$ 1

" (***) $x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{x_1 = 3}$ 1

Aufgabe 4: (Berechnung der inversen Matrix max = 6 Punkte)

Gesucht ist die inverse Matrix D^{-1} der gegebenen Matrix D:
Das Ergebnis allein genügt nicht. Es müssen auch
Zwischenschritte der Rechnung dargestellt werden

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(/6)

	-2	-3	0	1	0	0	$\vert\cdot 3$ +)
	3	+1	0	0	1	0	$\vert\cdot 2$
	0	2	-2	0	0	1	
	-2	-3	0	1	0	0	
1	0	-7	0	3	2	0	$\vert\cdot 2$ +)
	0	2	-2	0	0	1	$\vert\cdot 7$
	-2	-3	0	1	0	0	$\vert\cdot 7$
	0	-7	0	3	2	0	$\vert\cdot(-3)$ +)
1	0	0	-14	6	4	7	
1	-14	0	0	-2	-6	0	
1	0	-14	0	6	4	0	
1	0	0	-14	6	4	7	

1

$$D^{-1} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1/2

oder $\det D = +4+0+0-0-18-0 = -14$

$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$ 1/2 $\alpha_{23} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$ 1/2

$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6$ 1/2 $\alpha_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ 1/2

$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ 1/2 $\alpha_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ 1/2

$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = +6$ 1/2 $\alpha_{33} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$ 1/2

$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$ 1/2

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{21} & \alpha_{31} \\ -\alpha_{12} & +\alpha_{22} & -\alpha_{32} \\ +\alpha_{13} & -\alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1

Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation max = 12 Punkte)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$64x_1^2 + 96x_1x_2 + 36x_2^2 + 30\,x_1 - 40\,x_2 = 0$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel). (Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.)

(/8)

$A = \begin{pmatrix} 64 & 48 \\ 48 & 36 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 30 \\ -40 \end{pmatrix} \quad a_0 = 0$

$\det(A - \lambda \cdot E) \overset{!}{=} 0 = \begin{vmatrix} (64-\lambda) & 48 \\ 48 & (36-\lambda) \end{vmatrix} = (64-\lambda)(36-\lambda) - 48^2$ 1/2

$= \lambda^2 - 100\lambda$

$= \lambda(\lambda - 100)$ 1/2

1/2

$\Rightarrow \lambda_1 = 100 \quad \lambda_2 = 0$ 1/2 $\quad D = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_1 = 100$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 1/2

$\begin{pmatrix} -36 & 48 \\ 48 & -64 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} -36x_1 + 48x_2 = 0 \\ 48x_1 - 64x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{48x_2}{36} = \frac{64x_2}{48} = \frac{4}{3}x_2$ 1/2

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ normiert $\quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

1/2 1/2

Rechenseite für Aufgabe 5

EV zu EW $\lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 64 & 48 \\ 48 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

$$\left.\begin{matrix} 64x_1 + 48x_2 = 0 \\ 48x_1 + 36x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 = -\frac{48}{64}x_2 = -\frac{36}{48}x_2 = -\frac{3}{4}x_2 \quad 1/2$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}\varkappa \quad 1/2 \quad \Rightarrow \text{normiert} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

$$P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \qquad \det P = 1 \ \checkmark \quad 1/2$$

Kurvengleichung im KS $y_1 y_2$

$$\vec{a}^T \cdot Q = \vec{b}^T = (30 \cdot 0{,}8 - 40 \cdot 0{,}6 ; 30 \cdot (-0{,}6) - 40 \cdot 0{,}8)$$

$$b^T = (0 ; -50) \quad 1/2$$

$$W = \vec{y}^T \cdot D \cdot \vec{y} + \vec{b}^T \cdot \vec{y} + a_0 = 100y_1^2 - 50y_2 = 0$$

$$\Rightarrow 50y_2 = 100y_1^2 \quad |:50 \quad 1/2$$

$$y_2 = 2y_1^2 \quad \Rightarrow \text{Parabel} \quad 1/2$$

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/4)