Muster

Fachhochschule München **Fakultät 03 FA** **SS 2010**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Pöschl ,Radtke, Selting, Warendorf
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name: **Geb. – Datum** **Punkte: (/ 45)**

Vorname: **Stud.- Gruppe** **Korr:**

Raum/Platz-Nr: **Aufsicht:** **Note:**

Aufgabe 1: (Eigenwerte, Eigenvektoren von Matrizen max = ~~9~~ 10 Punkte)

a) Für die Matrix (/ ~~1~~ 4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

zeige man, dass $\lambda_1 = 3$ ein Eigenwert ist und ermittle die Eigenwerte λ_2 und λ_3.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) + 2 - 20 + 2(3-\lambda) - 10(2-\lambda) - 2(-1-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda^2 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 6\lambda + 3\lambda - 6 - 18$$
$$+ 6 - 2\lambda - 20 + 10\lambda + 2 + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda - 36 = 0$$ 2

Horner Schema:

	-1	4	9	-36
		-3	3	36
$\lambda_1 = 3$	-1	1	12	0

$\Rightarrow \lambda_1 = 3$ ist EW 1/2

reduziertes Polynom: $-\lambda^2 + \lambda + 12 = 0$ 1/2

$\Rightarrow$

$\lambda_2 = 4$; $\lambda_3 = -3$
1/2 1/2

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten. (/ 6)

EV zu $\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & +2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}\alpha \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{3}\alpha$ mit $\alpha = 3$ $\vec{x}_{EV_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2

EV zu $\lambda_2 = 4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = 0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = \beta, \beta \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow x_1 = -\beta$ mit $\beta = 1$ $\Rightarrow \vec{x}_{EV_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2

EV zu $\lambda_3 = -3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 14 & 0 \\ 0 & 24 & 28 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{7}{6}\gamma \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}\gamma$ mit $\gamma = 6 \Rightarrow x_{EV_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ 2

Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem, max = ~~8~~ 7 Punkte)

a) Für welche(n) Wert(e) von α ist das lineare Gleichungssystem (/ 4)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 3\\
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2\\
4x_1 + 2x_2 - x_3 &= \alpha\\
3x_1 + x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

überbestimmtes LGS!

lösbar ?

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{I}:\\ \\ \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 3\\
1 & -1 & 2 & 2\\
4 & 2 & -1 & \alpha\\
3 & 1 & 1 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \cdot(-4) \quad \cdot(-3) \end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\\ \mathrm{II}:\\ \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 3\\
0 & 2 & -1 & 1\\
0 & -2 & -5 & -12+\alpha\\
0 & -2 & -2 & -7
\end{array}\right)
$$

1,5

$$
\begin{array}{l}
\\ \\ \mathrm{III}:\\ \mathrm{IV}:
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 3\\
0 & 2 & -1 & 1\\
0 & 0 & -6 & -11+\alpha\\
0 & 0 & -3 & -6
\end{array}\right)
$$

1

IV: $x_3 = 2$

in III: $(-6)\cdot 2 = -11+\alpha$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}}$

Nur für $\alpha = -1$ ist das LGS lösbar

~~4~~ 1,5

auch andrer Weg (Nullzeile) möglich

b) Bestimmen Sie die Lösung(en) in diesem Falle! (/ 4)

$\underline{\underline{x_3 = 2}}$

in II : $2x_2 - 2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{2}}}$

in I : $x_1 + \frac{3}{2} + 2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -\frac{1}{2}}}$

Pro x_i 1

egal ob bei a oder b berechnet

Aufgabe 3: (Berechnung der inversen Matrix max = ~~8~~ 9 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen A und B

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & -2\\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}
\qquad
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

a) Prüfen Sie für beide Matrizen nach, ob sie eine Inverse besitzen. (/ 3)

$\det A = 0 + 20 - 36 - 0 + 6 + 6 = -4 \Rightarrow A^{-1}$ existiert 1

$\det B$: nach 1. Zeile entwickelt:

$$
\det B = (-1)^{1+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$= 1\cdot(0+0+0-2-0-0) + (-1)\cdot(0+0+0-0-2-0)$

$= +0 \Rightarrow B^{-1}$ existiert 2

b) Wie lautet ~~sie~~? (/ 5)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
-1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\
3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\
-5 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot(-5) \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
-1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\
0 & 6 & 10 & 3 & 1 & 0\\
0 & -13 & -21 & -5 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \cdot 13\\ \cdot 6 \end{array}
$$

1,5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 13 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot(-5) \\ \cdot(-1) \end{array} + \quad + \qquad 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -8 & -13 & -6 \\ 0 & 12 & 0 & -39 & -63 & -30 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 13 & 6 \end{array}\right) \cdot(-6) + \qquad 1{,}5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 9 & 15 & 6 \\ 0 & 12 & 0 & -39 & -63 & -30 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 13 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} :6 \\ :12 \\ :4 \end{array} \qquad 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -13/4 & -21/4 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & 13/4 & 3/2 \end{array}\right) \qquad 0{,}5$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 & 1 \\ -13/4 & -21/4 & -5/2 \\ 9/4 & 13/4 & 3/2 \end{pmatrix} \qquad 0{,}5$$

Aufgabe 4: Koordinatentransformation (7 / 8)

Im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) ist der Vektor $a = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}$ gegeben.

Durch Drehung von (x_1, x_2, x_3) um die Achse x_2 um den Winkel
ß = 36,87 Grad entsteht das Koordinatensystem (y_1, y_2, y_3),
in welchem ein weiterer Vektor $b^* = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ -20 \end{bmatrix}$ gegeben ist.

b ist die Darstellung von b^* im Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3),
a^* ist die Darstellung von a im Koordinatensystem (y_1, y_2, y_3).

Berechnen Sie Vektoren b und a^* und die Skalarprodukte (a,b) und (a^*, b^*).

Drehmatrix:

$$Q_2(36{,}87°) = \begin{pmatrix} \cos 36{,}87° & 0 & -\sin 36{,}87° \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 36{,}87° & 0 & \cos 36{,}87° \end{pmatrix} \qquad 0{,}5$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & -0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \qquad 1$$

$$\vec{a}^* = Q_2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & -0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 30 \\ 44 \end{pmatrix} \qquad 1{,}5$$

$$\vec{b} = Q_2^T \cdot \vec{b}^* = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}6 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 50 \\ -22 \end{pmatrix} \qquad 2$$

Skalarprodukte:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 50 \\ 22 \end{pmatrix} = -80 + 1500 - 880 = 540 \qquad 1$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b}^* = \begin{pmatrix} -8 \\ 30 \\ 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} = -80 + 1500 - 880 = 540 \qquad 1$$

Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation max = 12 Punkte)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}x_1 - \sqrt{5}x_2 = 0 .$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation Art und Lage des Kegelschnittes. Zeichnen Sie (Teil b) die Kurve im gegebenen Ausgangskoordinatensystem.
(Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.)

(/8)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad a_0 = 0$$

EW von A:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = -5\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 5) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 5$ (1,5)

EV zu $\lambda_1 = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :2 \\ \ \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = -\tfrac{1}{2}\alpha$$

mit $\alpha = 2 \Rightarrow \vec{x}_{EV_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Norm $\Rightarrow \vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (1,5)

EV zu $\lambda_2 = 5$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) :2 \ + \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = \beta, \ \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = 2\beta$$

mit $\beta = 1 \Rightarrow \vec{x}_{EV_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Norm $\Rightarrow \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1,5)

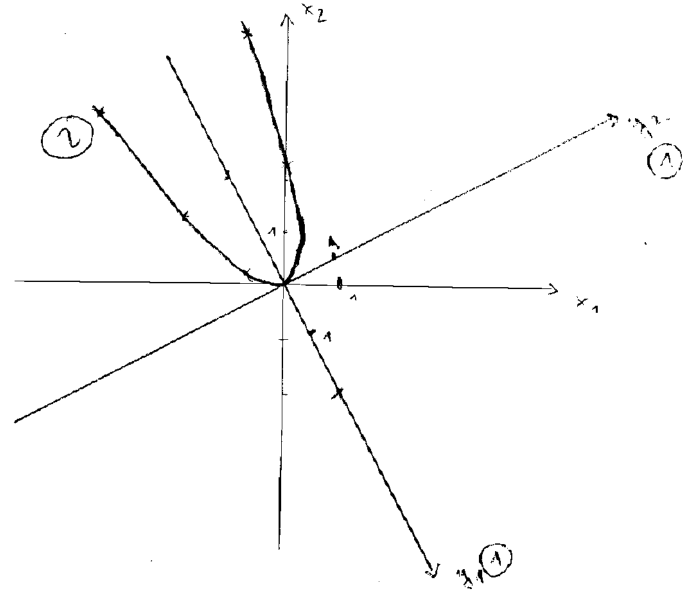
$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = -1$$

(1)

$$\Rightarrow P^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

b) Zeichnen Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1, x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/4)



zu a:

$$\vec{b} = P^{*T} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5}/2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (1)

$\Rightarrow$ Neue quadratische Form:

$$W = 0y_1^2 + 5y_2^2 + \frac{5}{2}y_1 + 0y_2 + 0 = 0$$

(1,5)

$$\Rightarrow \quad y_1 = -2y_2^2$$ PARABEL