Fachhochschule München **Fakultät 03 FA** **SS 2011**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Pöschl, v. Tapavicza, Warendorf
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name: **Geb. – Datum** **Punkte: ca(/ 53)**

Vorname: **Stud.- Gruppe** **Korr:**

Raum/Platz-Nr: Aufsicht: Note:

Deckblatt

Aufgabe 1: (Berechnung der inversen Matrix) ca (/ 8)

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

a) Welche der folgenden Operationen sind möglich? Geben Sie bei den möglichen Matrixprodukten auch den Typ (Anzahl Zeilen, Spalten) der Ergebnismatrix an. Berechnen Sie die Ergebnismatrix **NICHT!** (/ 4)

	Ist möglich	Ist nicht möglich
A^{-1}		X
$\det(A)$	X	
$A \cdot B$	Typ: (3/3)	
$A \cdot D$	Typ: (3/2)	
$A \cdot C$	Typ:	X
$C \cdot D$	Typ:	X
$D \cdot C$	Typ: (3/2)	
$C \cdot D^T$	Typ: (2/3)	

je $\frac{1}{2}$

b) Berechnen Sie, falls möglich, die Inverse von B: B^{-1}. (/ 4)

$$\det B = 1 \cdot \begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -3+6 = +3 = |B|$$

$\frac{1}{2}$ $\beta_{11} = \begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 3\end{vmatrix} = +3$ $\frac{1}{2}$ $\beta_{12} = \begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix} = +3$ $\frac{1}{2}$ $\beta_{13} = \begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = +1$

$\beta_{21} = \begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 0$ $\frac{1}{2}$ $\beta_{22} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 3$ $\frac{1}{2}$ $\beta_{23} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} = +2$

$\beta_{31} = \begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & -3\end{vmatrix} = 0$ $\frac{1}{2}$ $\beta_{32} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix} = -3$ $\frac{1}{2}$ $\beta_{33} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -1$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}\beta_{11} & -\beta_{21} & \beta_{31}\\ -\beta_{12} & \beta_{22} & -\beta_{32}\\ \beta_{13} & -\beta_{23} & \beta_{33}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$

Rechenseite für Aufgabe 1 oder mit Gauß

	1	0	0	1	0	0	$\vert\cdot(-1)$
	0	−1	−3	0	1	0	+
	1	2	3	0	0	1	
	1	0	0	1	0	0	
	0	−1	−3	0	1	0	$\vert\cdot(-1)$ $\vert\cdot 2$
$(\cdot 1)$	0	2	3	−1	0	1	+
	1	0	0	1	0	0	
	0	1	+3	0	−1	0	+
1	0	0	−3	−1	2	1	$\vert\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\vert$
	1	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	−1	+1	+1	
1	0	0	1	+1/3	−2/3	−1/3	

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Lineares Gleichungssystem mit Parameter ca (/ 12)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter a:

$$\begin{aligned} x1 + x2 + x3 &= 1 \\ 2x1 + ax2 + x3 &= 2 \\ x1 + x2 + ax3 &= 4 \end{aligned}$$

Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen ?
c) genau eine Lösung ?
d) Man berechne die Lösungen für a=3.

x_1	x_2	x_3	Abs	
1	1	1	1	$\mid\cdot(-2)$ + $\mid\cdot(-1)$ + } 1
2	a	1	2	
1	1	a	4	
1	1	1	1	
0	a−2	−1	0	1
0	0	a−1	3	1 $\Rightarrow a=1 \Rightarrow$ keine Lsg 1
$a \neq 1$				
1	1	1	1	**)
0	a−2	−1	0	*)
0	0	a−1	3	$\Rightarrow x_3 = \dfrac{3}{a-1}$ 1

aus *) $\Rightarrow$ falls $a=2 \Rightarrow 0\cdot x_2 - 1\cdot\left(\frac{3}{2-1}\right) = 0$ f

also auch für $a=2 \Rightarrow$ keine Lsg.

1

Fortsetzung Aufgabe Matrizenrechnung, Rechenseite

a) keine Lösung für $a = \{1; 2\}$ 1

b) unendlich viele Lsgn für $a = \{ / \}$ 1

c) genau eine Lsg für $2 \neq a \neq 1$ 1

1) für $a = 3 \Rightarrow$

$$x_3 = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad 1$$

aus *) $\Rightarrow$ $x_2 = \frac{x_3}{3-2} = 1{,}5$ 1

aus **) $\Rightarrow$ $x_1 = 1 - x_2 - x_3$

$$= 1 - 1{,}5 - 1{,}5 = -2 \qquad 1$$

also $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: (Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren)

Im dreidimensionalen Raum R^3 sind die Vektoren **ca. (/ 8)**

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix},$$

mit einem Parameter t gegeben.

a) Für welche Werte des Parameters t in a_3 sind die Vektoren (/ 3)

a_1 , a_2 , a_3 , linear **ab**hängig ?

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \overset{!}{=} 0 \quad 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & t \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6t + 24 - 32 - 0 - 2t = 0 \quad 1$$

$$4t - 8 = 0$$

$$t = 2 \quad 1$$

Fortsetzung Aufgabe Lineare Abhängigkeit .....

b) Für den Parameterwert t = 0 berechne man a_4 als lineare Kombination der anderen 3 Vektoren, d.h. man bestimme die Parameter λ_1, λ_2 und λ_3 in der Darstellung (/ 5)

$$a_4 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 1

λ_1	λ_2	λ_3	Abs	
1	3	4	6	
3	4	0	8	$\mid \cdot (-1)$
2	2	0	2	$\mid + 2$
1	3	4	6	***)
3	4	0	8	**)
1	0	0	-4	*) 1

aus *) $\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -4}$ 1

aus **) $\Rightarrow 4\lambda_2 = 8 - 3 \cdot \lambda_1 = 8 + 3 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = +5}$ 1

aus ***) $\Rightarrow 4\lambda_3 = 6 - \lambda_1 - 3\lambda_2 =$

$= 6 + 4 - 3(+5) = -5$

$\boxed{\lambda_3 = -\frac{5}{4}}$ 1

Aufgabe 4: (Hauptachsentransformation) ca (/ 12)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$$5x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_2^2 - 66 = 0$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation Art und Lage des Kegelschnittes. Zeichnen Sie (Teil b) die Kurve im gegebenen Ausgangskoordinatensystem.
(Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.)

(/ 8) 1/2

1/2 $A = \begin{pmatrix} 5 & -3/2 \\ -3/2 & 5 \end{pmatrix}$ $a_1 = b_1 = 0$; $a_0 = -66$

$\det(A - \lambda \cdot E) = (5-\lambda)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$ 1/2 $\lambda_1 = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$, $\lambda_2 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ 1/2

EV zu $\lambda_1 = \frac{13}{2}$

$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ $-\frac{3}{2}(x_{11} + x_{12}) = 0$; $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$x_{12} = -x_{11}$ 1/2 1/2 1/2

1/2

EV zu $\lambda_2 = \frac{7}{2}$ $\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ 1/2 1/2

$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\frac{3}{2}(x_{21} - x_{22}) = 0$; $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$x_{21} = x_{22}$

$\det P = +1$ ✓ 1/2

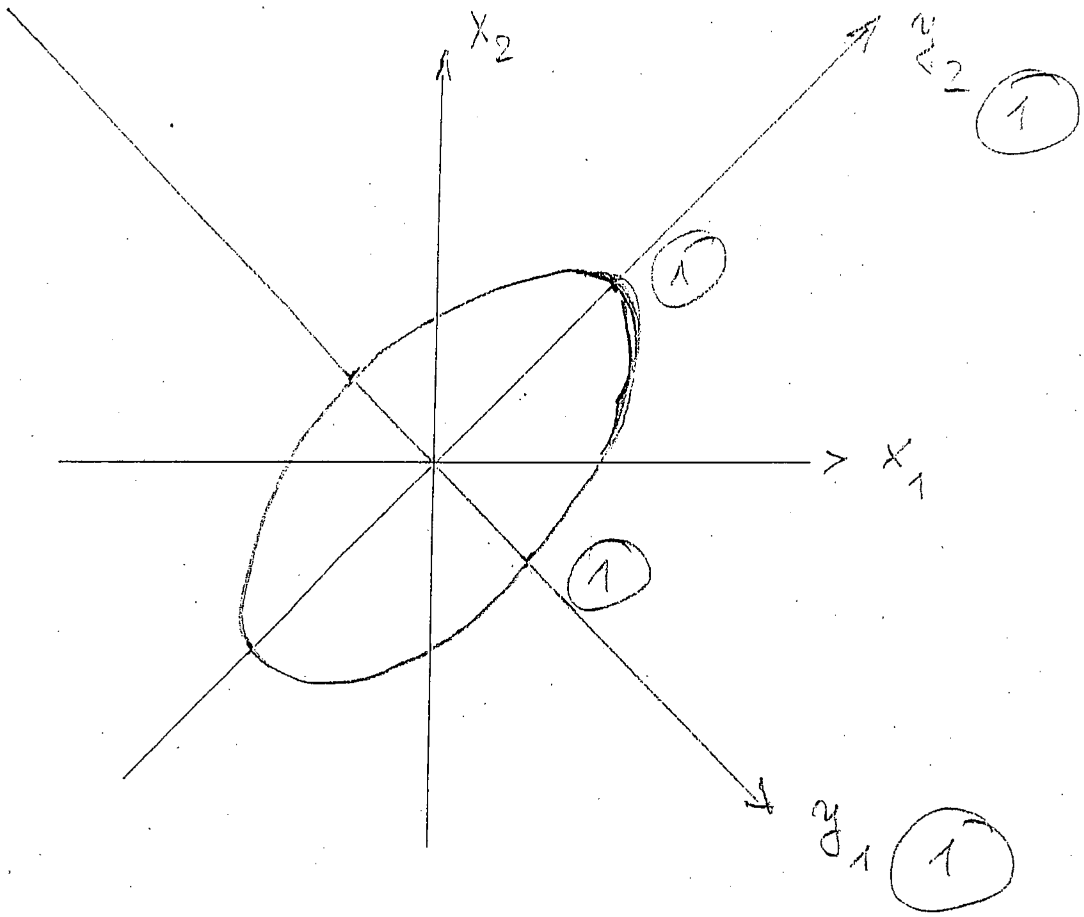
$\frac{13}{2} y_1^2 + \frac{7}{2} y_2^2 - 66 = 0 \Rightarrow \left(\frac{13}{2 \cdot \sqrt{33}} y_1\right)^2 + \left(\frac{7}{2 \cdot \sqrt{33}} y_2\right)^2 = 1$ 1/2

$\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = 1$

$a = \frac{2 \cdot \sqrt{33}}{\sqrt{13}} = 3{,}19$ 1/2 $b = \frac{2\sqrt{33}}{\sqrt{7}} = 4{,}34$ 1/2 Ellipse 1/2

Fortsetzung Aufgabe Haupachsentransformation

b) Zeichnen Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sieden Graphen der Kurve (Maßstab 1 LE = 1 cm). (/ 4)



Aufgabe 3: (Eigenwerte, Eigenvektoren , Winkelberechung ca (/ 13)

a) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (/ 3)

berechne man die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3.

$$\det(A - \lambda \cdot E) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 0 & 1 \\ 2 & (2-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 0 \\ 2 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$0 = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$ je EW 1

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 3} \quad \boxed{\lambda_2 = 2} \quad \boxed{\lambda_3 = 1}$$

Eigenvektor zu EW $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}$$

$x_{13} = 0$

$2x_{11} - x_{12} = 0 \Rightarrow x_{12} = 2x_{11}$ 1

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varkappa_1$$ 1

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten. (/ 6)

Eigenvektor zu EW $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_{21} + x_{23} &= 0 \\ 2x_{21} &= 0 \\ -x_{23} &= 0 \end{aligned} \quad 1$$

$x_{21} = x_{23} = 0$; x_{22} beliebig

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varkappa_2 \quad 1$$

Eigenvektor zu EW $\lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_{31} + x_{33} &= 0 \\ 2x_{31} + x_{32} &= 0 \end{aligned} \quad 1$$

$\Rightarrow x_{23} = x_{33} = -2x_{31}$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \varkappa_3 \quad 1$$

Fortsetzung Aufgabe Eigenwerte ....

c) Berechnen Sie die 3 spitzen Winkel zwischen den Eigenvektoren. (/ 3)

$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{n}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\cos\alpha_{12} = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 1/2

$\cos\alpha_{13} = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = \frac{-1+4}{3\sqrt{5}} = +\frac{1}{\sqrt{5}}$ 1/2

$\cos\alpha_{23} = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \frac{2}{3}$ 1/2

$\alpha_{12} = 26{,}57°$ 1/2

$\alpha_{13} = 63{,}43°$ 1/2

$\alpha_{23} = 48{,}19°$ 1/2

d) Wie muss die Matrix A beschaffen sein, dass die Winkel zwischen den Eigenvektoren alle 90 Grad betragen? (/ 1)

- ☐ A hat den Eigenwert 1
- ☒ A ist symmetrisch 1
- ☐ A ist orthogonal
- ☐ A hat nur reelle Eigenwerte
- ☐ A ist invertierbar
- ☐ A ist singulär