WS 02/03

[redacted]

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA

DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK I (LINEARE ALGEBRA) - FAHRZEUGTECHNIK -

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Gröger, Kloster, Plöchinger, Pöschl, Stiefenhofer

!! WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen !!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein !!

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

6

Aufgabe 1: Berechnen Sie zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) $2A - B^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ (2)

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ (2)

c) $C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1,-2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ (1)

d) $C^T \cdot C = (1,-2,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1+4+9 = 14$ (1)

8

Aufgabe 2: Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ habe die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ mit einem Parameter b. Ermitteln Sie

a) eine Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$, (3)

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -5 & b \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2\cdot \\ 1\cdot \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & b \end{array}\right) \, 2\cdot$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right) \Rightarrow Rg(A) = 2$$

b) den Rang r von A. $r = 2$ (1)

c) Warum ist das LGS für $b \neq -2$ nicht lösbar? $b \neq 2 \overset{a)+b)}{\Rightarrow}$ (1)

$Rg(A|\vec{b}) = 3 \neq Rg(A) \Rightarrow$ nicht lösbar

d) Berechnen bei $b = -2$ die allgemeine Lösung $\vec{x}$ in Vektorform. (3)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 - 2x_3 + x_4 \\ x_2 &\overset{a)}{=} 1 + 2x_3 - 3x_4 \end{aligned}\right\} \cdot (2) = 1+1$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_3, x_4 \text{ beliebig}$$

(1)

4

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. (4)

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 1\cdot \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 1\cdot$$

(1)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) -1\cdot \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{2}$$

(1) (1)

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad //$$

(1)

8 **Aufgabe 4:** Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

a) die Determinante det A und die Inverse A^{-1}, 2

$$|A| = 3/2 - 1/2 = 1 \;,\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

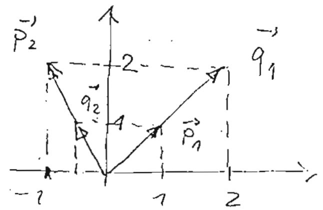
1 1

b) die Bildvektoren $\vec{q}_1 = A \cdot \vec{p}_1$ und $\vec{q}_2 = A \cdot \vec{p}_2$. 2 1+1

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \;,\quad \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Zeichnen Sie Vektoren $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ in ein ebenes Koordinatensystem, 2

$$\vec{q}_1 = 2 \cdot \vec{p}_1$$
$$\vec{q}_2 = \frac{1}{2} \cdot \vec{p}_2 \quad \Leftarrow$$



d) welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat A? (ohne Rechnung, siehe Zeichnung). 2 1+1

Skizze $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1/2$ EW von A zum EV $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$

---

10 **Aufgabe 5:** Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. 3

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{umständlich: 1. Spalte entw.} \quad -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

1 1

$$= -\lambda \cdot (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 \cdot (1-\lambda) = (1-\lambda) \cdot [2 - \lambda(3-\lambda)]$$
$$= (1-\lambda) \cdot [2 - 3\lambda + \lambda^2]$$

b) Zeigen Sie, daß A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ hat. 2

$$p(\lambda) = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} \lambda_1 = 1 \text{ oder } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2,\ 1$$

1 1

c) Berechnen Sie alle Eigenvektoren $\vec{u}$ von A zum Eigenwert λ_1 und λ_2. 5

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \iff \boxed{B \cdot \vec{u} = \vec{0}} \text{ mit}$$
$$B := A - \lambda \cdot E$$

3 $\vec{u}$ zu $\lambda = 1$: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = +2u_3 \\ u_2 = u_2 \\ u_3 = u_3 \end{array} \Rightarrow \vec{u} = u_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \cdot \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 2

u_2, u_3 bel., allgem. EV zu $\lambda = 1$

2 $\vec{u}$ zu $\lambda = 2$: $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u_2 = 0 \\ u_1 = +u_3 \end{array} \Rightarrow \vec{u} = u_3 \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ allgem. EV zu $\lambda = 2$

1

Schlüssel:

0 – 11	5
12 –	4
18 –	3
24 –	2
30 – 36	1

$6 + 8 + 4 + 8 + 10$
$= 36$ Pkt'e ges.