Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **WS 2003/04**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Gröger, Kloster, Pöschl, Warendorf

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!
(Ausnahme: Aufgabe 1, wo die richtige Angabe genügt.)

AUFGABE 6 NUR FÜR ERSTSEMESTER, AUFGABE 7 NUR FÜR WIEDERHOLER

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte:** (/ 50)
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: (Matrizenrechnung) Es ist jeweils eine oder mehr als eine Aussage richtig! (Jedes richtige Produkt ergibt einen Punkt, jedes falsche einen Punktabzug, bei negativen Werten werden 0 Punkte eintragen)

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{(Typ (3,3))},\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \text{(Typ (3,2)) und } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \text{(Typ (2,3))}.$$

Welche Produkte (Matrizen nicht transponieren)
a) zweier Matrizen
b) dreier Matrizen
sind möglich, wenn jede Matrix in jedem Produkt höchstens einmal vorkommen darf? Von welchem Typ sind die Ergebnisse? (Produkte nur angeben, nicht ausrechnen!!!)

(/7)

a) A · B Typ (3,2)
B · C Typ (3,3)
C · A Typ (2,3)
C · B Typ (2,2)

b) A · B · C Typ (3,3)
B · C · A Typ (3,3)
C · A · B Typ (2,2)

0,5 Abzug pro falsche Angabe

je 1 P
0,5 für Produkt
0,5 für Typ

Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem)

Ermitteln Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems: (/7)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_1 - 2x_3 - 3x_4 &= -2 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	c	ZS	
1	−1	1	0	0	1	·2 ·3
0	−2	3	1	−1	1	
2	0	−2	−3	−2	−5	
−3	4	−1	4	6	10	$\boxed{2}$
	−2	3	1	−1	1	·2
	−2	4	3	2	7	
	1	2	4	6	13	$\boxed{2}$
		−1	−2	−3	−6	·7
		7	9	11	27	$\boxed{1}$
			−5	−10	−15	

$-5x_4 = -10 \Rightarrow x_4 = \underline{\underline{2}}$
$-x_3 - 2x_4 = -3 \Rightarrow x_3 = 3 - 2x_4 = \underline{\underline{-1}}$
$x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6 \Rightarrow x_2 = 6 - 2x_3 - 4x_4 = \underline{\underline{0}}$ $\boxed{2}$
$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 = \underline{\underline{1}}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter)

Für welche Werte des reellen Parameters t besitzt das lineare Gleichungssystem (/8)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 12t \\ 2x_1 + 12x_2 + 7x_3 &= 12t + 7 \\ 1x_1 + 10x_2 + 6x_3 &= 7t + 8 \end{aligned}$$

a) keine Lösung?
b) unendlich viele Lösungen?
c) genau eine Lösung?
d) Berechnen Sie die Lösungen (falls vorhanden) in den Fällen b) und c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right) :2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6t \\ 0 & -8 & -5 & -7 \\ 0 & -8 & -5 & -t-8 \end{array}\right) \quad \boxed{1,5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6t \\ 0 & -8 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{array}\right) \quad \boxed{1,5}$$

$\Rightarrow$ für $t=-1$ unendlich viele Lösungen,
da $Rg(A) = Rg(A|c) = 2$
(da Nullzeile) $\boxed{1}$

Keine Lösung sonst,
da $Rg\,A = 2$, $Rg(A|c) = 3$ $\boxed{1}$
(da Widerspruch 3. Zeile) $\boxed{1}$

a) $t \neq -1$
b) $t = -1$ } siehe →
c) nie

d) unendlich viele $t=-1$

I: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
II: $-8x_2 - 5x_3 = -7$
III: $0x_3 = 0$ $\Rightarrow$ x_3 ist frei wählbar $x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

II: $-8x_2 = -7 + 5\alpha$ $\Rightarrow$ $x_2 = +\frac{7}{8} - \frac{5}{8}\alpha$

III: $x_1 = -6 - 2(\frac{7}{8} - \frac{5}{8}\alpha) - \alpha$ $\Rightarrow$ $x_1 = -\frac{31}{4} + \frac{1}{4}\alpha$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -31/4 \\ 7/8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1/4 \\ -5/8 \end{pmatrix} \quad \boxed{2}$$

Aufgabe 4: (Berechnung der inversen Matrix)

Gesucht ist die inverse Matrix D^{-1} der gegebenen Matrix D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ /6)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \boxed{1,5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot 2 \end{array} \quad \boxed{1,5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot 2 \end{array} \quad \boxed{1,5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(-3) \\ :3 \\ :3 \end{array} \quad \boxed{1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \boxed{0,5}$$

$\det D = -1 - 2 = -3$ $\boxed{1}$

$\alpha_{11} = -3 \quad \alpha_{12} = 0 \quad \alpha_{13} = 0$
$\alpha_{21} = -2 \quad \alpha_{22} = 1 \quad \alpha_{23} = -1$
$\alpha_{31} = 4 \quad \alpha_{32} = -2 \quad \alpha_{33} = -1$ $\boxed{4}$

$$\Rightarrow D^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$= \begin{pmatrix} +1 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A. (/5)

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) - 2(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda + \lambda^2 - 2)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda+2)(1-\lambda) = 0 \quad \boxed{3}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \ \lambda_3 = -2 \quad \boxed{2}$$

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zu den jeweiligen Eigenwerten. (/6)

$\boxed{\lambda_{1,2} = 1}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = \alpha \text{ beliebig} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha = 1 \quad \vec{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{lll} 3x_1 + 2x_3 = 0 & \Rightarrow & x_1 = -\frac{2}{3}\beta \\ 2x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow & x_2 = -1/2\,\beta \\ 0x_3 = 0 & \Rightarrow & x_3 = \beta \text{ beliebig} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2/3\,\beta \\ -1/2\,\beta \\ \beta \end{pmatrix} \text{ mit } \beta = 6 \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{Normierung: } \tilde{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

AUFGABE 6 NUR FÜR ERSTSEMESTER !!!!!!

Aufgabe 6: (Hauptachsentransformation)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 6 = 0$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel). (Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.) (/8)

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \;, \lambda_2 = 6 \qquad \left[\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\right]$$

$\boxed{2}$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{lll} x_1 - 2x_2 = 0 & \Rightarrow & x_1 = 2\alpha \\ 0x_2 = 0 & \Rightarrow & x_2 = \alpha \text{ beliebig} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha = 1 \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Norm.: } \vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 6$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{lll} 2x_1 + x_2 = 0 & \Rightarrow & x_1 = -1/2\,\beta \\ 0x_2 = 0 & \Rightarrow & x_2 = \beta \text{ beliebig} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1/2\,\beta \\ \beta \end{pmatrix} \text{ mit } \beta = 2 \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Norm.: } \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \det P = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \underline{1}$$

$\Rightarrow$ Koordinatensystem nur gedreht

$$\Rightarrow y_1^2 + 6y_2 - 6 = 0 \Rightarrow y_1^2 + 6y_2^2 = 6$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{y_2^2}{1^2} = 1 \Rightarrow \text{Ellipse mit Halbachsen}$$

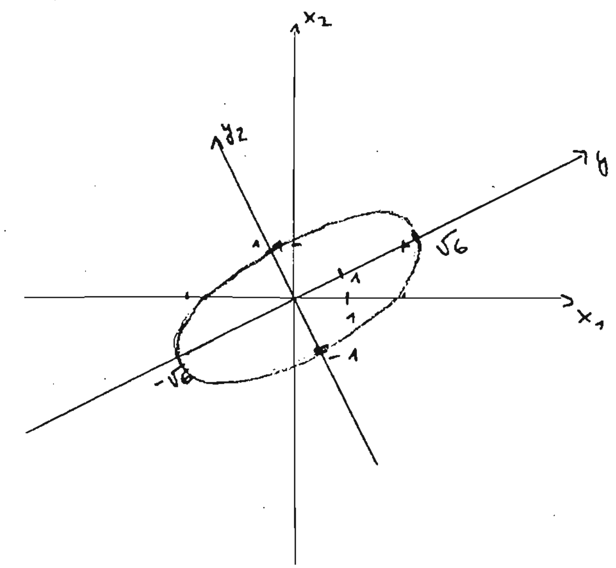
$a = \sqrt{6} = 2{,}4$

$b = 1$

$\boxed{2}$

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1, x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve. (/3)

$\boxed{3}$



AUFGABE 7 NUR FÜR WIEDERHOLER !!!!!!

Aufgabe 7 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter)

Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem (/11)

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + ax_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

a) keine Lösung?
b) unendlich viele Lösungen?
c) genau eine Lösung?
d) Berechnen Sie die Lösungen in den Fällen b) und c)

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & a & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & a & 2 & 2 \\ 2 & 0 & a+2 & a+2 & 0 \\ 3 & 0 & 2a-1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & a & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2a-1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & a & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2a-2 & 0 \end{array}$$

$\cdot 2$; $: (a+2)$ $\Rightarrow$ $a+2 \neq 0 \Rightarrow a = -2$ untersuchen 1,5

$\cdot(2a-1)$ $\Rightarrow 2a-1 \neq 0 \Rightarrow a = 1/2$ untersuchen 1,5

$\Rightarrow 2a-2 = 0 \Rightarrow a = 1$ untersuchen 1,5

Fall: $a = -2$ (B1, B2, B3)
B2 Nullzeile

$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$
$-5x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{x_3 = \alpha}$ beliebig $\Rightarrow$ $\underline{x_2 = \frac{1}{5}\alpha}$ $\Rightarrow$ $x_1 = \frac{2}{5}\alpha - 2\alpha + 2 = \underline{-\frac{8}{5}\alpha + 2}$

unendlich viele Lösungen 1,~~8~~

Fall: $a = 1/2$ (C1, C2, C3)

$x_1 + 1/2\, x_2 + 2x_3 = 2$
$5/2\, x_2 + 5/2\, x_3 = 0$
$-x_3 = 0$

$\Rightarrow \underline{x_3 = 0} \Rightarrow \underline{x_2 = 0} \Rightarrow \underline{x_1 = 2}$ 1

3. Fall: a 1 (D1, D2, D3)

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$
$x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{x_3 = \beta}$ beliebig $\Rightarrow$ $\underline{x_2 = -\beta}$ $\Rightarrow$ $\underline{x_1 = 2 - \beta}$ 1,~~#~~

unendlich viele Lösungen

4. Fall
$a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1/2; 1\}$ (D1, D2, D3)

$x_1 + ax_2 + 2x_3 = 2$
$x_2 + x_3 = 0$
$(2a-2)x_3 = 0 \mid :(2a-2)$ 1,5

$\Rightarrow \underline{x_3 = 0} \Rightarrow \underline{x_2 = 0} \Rightarrow \underline{x_1 = 2}$

genau eine Lösung (wie 2. Fall)

a) nie (es gibt keinen Fall, der keine Lösung erzeugt) 1

b) 1. Fall $a = -2$ $\vee$ 3. Fall $a = 1$ ~~#~~ 0,

c) 2. Fall $a = -1/2$ $\vee$ 4. Fall $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1/2, 1\}$ ~~#~~ 0,
$\Rightarrow a \in$ ~~...~~ $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

d) unendlich viele Lösungen:

Siehe 1. Fall (a=-2): $x_1 = -\frac{8}{5}\alpha + 2$, $x_2 = 1/5\,\alpha$, $x_3 = \alpha$ $\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -8/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

siehe 3. Fall: $x_1 = 2 - \beta$, $x_2 = -\beta$, $x_3 = \beta$ $\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

eine Lösung:
2., 4. Fall: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ $\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkte s. Fälle