Notenschlüssel:

Punkte	Note
0 - 15	5
16 - 21	4
22 - 27	3
28 - 33	2
34 - 40	1

FACHHOCHSCHULE MÜNCHEN FACHBEREICH 03 FA WS 2004/05

VORPRÜFUNG IN MATHEMATIK - FAHRZEUGTECHNIK

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, nichtprogrammierbare Taschenrechner
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl, Schlamp, Selting, Warendorf

Name: Vorname:	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & t \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = -t \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

1 $$= 3t - 3$$

$$= 3(t-1)$$

(b) Für welche Werte von t existiert die inverse Matrix?

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow t \neq 1$$ 1

(c) Berechnen Sie die inverse Matrix für diese Werte von t:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Mit $A_{11} = 5-t$, $A_{12} = 4-2t$, $A_{13} = -6$

2 $A_{21} = 2$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -3$

$A_{31} = 2t$, $A_{32} = t$, $A_{33} = -3$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3(t-1)} \begin{pmatrix} 5-t & -2 & 2t \\ 2t-4 & 1 & -t \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & t & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-4) \quad |\cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & t & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & t & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(1-t) \\ |(-t) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3(1-t) & 0 & -4+2t & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1-t & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4+2t}{-3(1-t)} & \frac{1}{-3(1-t)} & \frac{-t}{-3(1-t)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-t} & -\frac{1}{1-t} & +\frac{1}{1-t} \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^{*)}\frac{5-t}{-3(1-t)} & \frac{-2}{-3(1-t)} & \frac{2t}{-3(1-t)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4+2t}{-3(1-t)} & \frac{1}{-3(1-t)} & \frac{-t}{-3(1-t)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-t} & \frac{-1}{1-t} & +\frac{1}{1-t} \end{array}\right)$$

*) $-3(1-t)+8-4t=5-t$

...en die Matrizen $\Sigma = 4P$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1\\4&3&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\6&5\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&1\\\cdot&\cdot&7\\2&2&2\end{pmatrix}$$

... der folgenden Berechnungen sind möglich? Kreuzen Sie die richtigen Antworten* an!

Matrix	A	B	C	D		
Determinante	☒	☐	☐	☒		
Inverse Matrix	☒	☐	☐	☐		
Produkte	$A\cdot B$	$A\cdot C$	$A\cdot D$	$B\cdot A$	$B\cdot C$	$B\cdot D$
	☒	☐	☐	☐	☒	☒
Produkte	$C\cdot A$	$C\cdot B$	$C\cdot D$	$D\cdot A$	$D\cdot B$	$D\cdot C$
	☒	☐	☐	☐	☐	☒

$\Sigma = \frac{1}{2}$

Aufgabe 3: Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$\Sigma = 7P$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \quad\quad\quad x_3 &= 2\\ -x_1 + x_2 + (1+\alpha)x_3 &= -2\\ x_1 + \alpha x_2 + \quad\quad 4x_3 &= -(1+\alpha)\end{aligned}$$

(a) keine Lösung?

(b) unendlich viele Lösungen?

(c) genau eine Lösung?

(d) Man berechne die Lösungen in den Fällen (b) und (c).

Gauß:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\-1&1&1+\alpha&-2\\1&\alpha&+4&-(1+\alpha)\end{array}\right)\quad (1)\ (-1)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&3&\alpha&0\\0&\alpha-2&5&-(3+\alpha)\end{array}\right)\cdot\left[-\frac{\alpha-2}{3}\right]$$

(2)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&3&\alpha&0\\0&0&\frac{-\alpha^2+2\alpha+15}{3}&-(3+\alpha)\end{array}\right)\cdot(-3)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&3&\alpha&0\\0&0&(\alpha+3)(\alpha-5)&3(3+\alpha)\end{array}\right) =: (A\,|\,b)$$

*Jede richtige Antwort ergibt einen halben Punkt, jede falsche einen halben Punkt Abzug. Aber insgesamt kein Negativsaldo!

a) keine Lösung, wenn $R_g(A) < R_g(A|b)$

(1) d.h. für $\alpha = 5$: $R_g(A) = 2$, $R_g(A|b) =$

b) ∞-viele Lösungen für $R_g(A) > R_g(A|b$

(1) d.h. für $\alpha = -3$: $R_g(A) = 2$, $R_g(A|b) =$

c) genau eine Lösung für $R_g(A) = R_g(A|b$

(1) d.h. für $(\alpha \neq -3 \wedge \alpha \neq 5)$: $R_g(A) = R_g(A|$
$= 3$

d) für $\alpha = -3$ $(\to b))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&3&-3&0\\0&0&0&0\end{array}\right) = (A\,|\,b)$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}2-t\\t\\t\end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

(1)

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

für $(\alpha \neq -3 \wedge \alpha \neq 5)$ $(\to c)$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{3}{\alpha-5},\quad x_2 = -\frac{\alpha}{3}x_3 = \frac{-\alpha}{\alpha-}$$

(1) $$x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 + \frac{2\alpha}{\alpha-5} + \frac{3}{\alpha-5}$$

$$x_1 = \frac{2\alpha - 16 + 2\alpha + 9}{\alpha - 5} = \frac{4\alpha - 7}{\alpha - 5}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{\alpha - 5}\begin{pmatrix} 4\alpha - 7 \\ -\alpha \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) =$$
$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \Sigma = 7P$

(a) das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda -$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda$$

(2)

(b) alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\det(A - \lambda E) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

(1) (1)

(c) und die zugehörigen normierten Eigenvektoren v_1, v_2, v_3

- EV $\vec{v}_1$ zu $\lambda_1 = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$ (1)

- EV $\vec{v}_2$ zu $\lambda_2 = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (1)

- EV $\vec{v}_3$ zu $\lambda_3 = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3

Gegeben ist die Gleichung eines Kegelschnitts im Koordinatensystem (x_1, x_2).

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2} = 0 \qquad (1)$$

(x_1'', x_2'') bezeichnet das Koordinatensystem, in dem der den Kegelschnitt beschreibende Ausdruck seine Standardform annimmt.

(a) Geben Sie die Standardform des Kegelschnitts an (Hinweis: das Ergebnis ist eine Parabel)

$$(x_1\ x_2)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $a^T = (3\ 1)$, $c = \frac{1}{2}$

1. Schritt: • Eigenwerte von A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) \stackrel{!}{=} 0 \quad 2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \ ; \ \lambda_2 = 0 \quad 1$$

• Eigenvektoren von A

$\underline{\lambda_1 = 5:}$ $\quad (A - 5I)\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & +2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ normierter Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ 1

$\underline{\lambda_2 = 0:}$ $\quad (A - 0\cdot I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ normierter Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow$ Transformationsmatrix $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ da 1

$\det(Q) = 1 \Rightarrow$ Rotation 1

2. Schritt: Basiswechsel

Koordinatentransformation:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \iff \vec{x} = Q\vec{x}'$$

$$\Rightarrow (\vec{x}')^T Q^T A Q \vec{x}' + \vec{a}^T Q \vec{x}' + c = 0$$

$$\iff (x_1'\ x_2') \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + (3\ 1) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\iff 5x_1'^2 + (5/\sqrt{5}\quad -5/\sqrt{5}) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\iff 5x_1'^2 + \sqrt{5}\,x_1' - \sqrt{5}\,x_2' + \frac{1}{2} = 0 \quad 2$$

3. Schritt: Standardform

durch quadratische Ergänzung:

$$5\left(x_1'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_1'\right) - \sqrt{5}\,x_2' + \frac{1}{2} =$$

$$= 5\left(x_1'^2 + 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}x_1' + \frac{1}{4\cdot 5}\right) - \frac{1}{4} - \sqrt{5}\,x_2' + \frac{1}{2} =$$

$$= 5\left(x_1' + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 - \sqrt{5}\left(x_2' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$$

$$= 5\,x_1''^2 - \sqrt{5}\,x_2'' = 0,$$

mit den Verschiebungsgleichungen

$$x_1'' = x_1' + \frac{1}{2\sqrt{5}} = x_1' + 0{,}2235 \quad 2$$

$$x_2'' = \ldots = x_1' - 0.1117$$