Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **WS 2005/06**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl, Selting, Warendorf

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!
(Ausnahme: Aufgabe 1, wo die richtige Angabe genügt.)

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte: (/ 54)**
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: (Matrizenrechnung) Es ist jeweils eine oder mehr als eine Aussage richtig!
(Jedes richtige Produkt ergibt einen Punkt, jedes falsche einen Punktabzug, bei negativen Werten werden 0 Punkte eintragen)

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{(Typ (2,2)}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \text{(Typ (3,2)) und } C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \text{(Typ (2,3))}.$$

Welche Produkte (Matrizen nicht transponieren)
a) Zweier verschiedener Matrizen
b) dreier verschiedener Matrizen
sind möglich, wenn jede Matrix in jedem Produkt höchstens einmal vorkommen darf? Von welchem Typ sind die Ergebnisse? (Produkte nur angeben, nicht ausrechnen!!!)

(/7)

Lösung: a) A*C (2*3) , B*C (3*3) , C*B (2*2) , B* A (3,2) ½ Punkt Produkt, ½ Punkt Typ
b) A*C*B (2,2) , C*B*A (2,2) , B*A*C (3,3) ½ Punkt Produkt, ½ Punkt Typ

Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter)

Stellen Sie mit Hilfe des Gauss Algorithmus fest:
Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem (/12)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= a \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

a) keine Lösung?
b) unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie diese, sofern vorhanden!
c) genau eine Lösung? Berechnen Sie diese für a=1, sofern vorhanden!

Lösung mir Gauss Algorithmus, man nehme Zeile 2 und Zeile 3 nach vorne

1	1	2	-1	2	PIVOTZEILE	
1	-1	1	3	a	mal -1 plus 1. Zeile	1 Punkt
2	1	-1	0	3	plus -2 mal erste Zeile	
a	1	3	-2	1	plus –a mal erste Zeile	

1	1	2	-1	2		
0	2	1	-4	2-a	PIVOTZEILE	
0	-1	-5	2	-1	mal 2 plus zweite Zeile	2 Punkte
0	1-a	3-2a	-2+a	1 -2a	plus 1–a mal zweite Zeile	

1	1	2	-1	2		
0	2	1	-4	2-a		
0	0	-9	0	-a	PIVOTZEILE	2 Punkte
0	0	3a-2	-a	-a	vierte Zeile mal 9 plus 3a–2 mal dritte Zeile	

1	1	2	-1	2		
0	2	1	-4	2-a		2 Punkte
0	0	-9	0	-a		
0	0	0	-9a	-a(3a+7)	(oder $-3a^2$ - 7a)	

Auch andere Wege: Umrechnung gesamt 7 Punkte

a) nie 1 Punkt
b) a = 0 unendlich viele Lösungen 1 Punkte
Durch Heraufrechnen der Lösungen ergibt sich

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 2 Punkt

c) a $\neq$ 0 genau eine Lösung 1 Punkt
Durch Heraufrechnen der Lösungen ergibt sich für a = 1

$$x = 1/9 * \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{allg.} \quad x = 1/9 * \begin{pmatrix} 2 \\ 23+a \\ a \\ 3a+7 \end{pmatrix}$$ 1 Punkt

Aufgabe 3: (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix, inverse Matrix, Diagonalmatrix, Ähnlichkeitstransformation) (/24)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte λ_1 , λ_2 und λ_3 von A. (/5)

Lösung: Charakteristisches Polynom (Sarrus oder entwickeln) 2 Punkte

$$-(\lambda + 3)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12$$

$$\lambda_1 = -3 \;,\; \lambda_2 = 1 \;,\; \lambda_3 = 4$$ 3 Punkte

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zu den jeweiligen Eigenwerten. in normierter Darstellung (rechnen Sie mit $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$ weiter): (/6)

zu $\lambda_1 = -3$ $\quad x_1 = \pm 1/(\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 Punkte

zu $\lambda_2 = 1$ $\quad x_2 = \pm 1/(\sqrt{6}) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 Punkte

zu $\lambda_3 = 4$ $\quad x_3 = \pm 1/(\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 Punkte

Berechnung der Eigenvektoren durch Gauss oder durch Aulösen der LGS, der dritte Vektor eventuell über das Kreuzprodukt.

c) Man berechne die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (/4)

Lösung:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

erste Zeile nach unten

je 1/2 Punkt pro Tableau

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

alternative Wege oder Minoren auch möglich

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -5/3 & -1/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 5/12 & 1/12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 9/12 & -3/12 & -3/12 \\ 0 & 1 & 0 & -3/12 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & -3/12 & 5/12 & 1/12 \end{array} \quad = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1/2 Punkt

d) Man gebe (Hinweis: dies ist ohne weitere Berechnungen möglich !) (/9)

folgende Werte an

- Die Determinante von A Lösung $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -12$ 1 Punkt

- Die Determinante der inversen Matrix A^{-1} Lösung $\det(A) = 1/\det(A) = 1/(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = -1/12$ 1 Punkt

- Die Eigenwerte der inversen Matrix A^{-1} Lösung Kehrwerte $-1/3$, 1 , 1/4 3 Punkte

- Die zur Matrix A gehörende Diagonalmatrix und die zugehörige Transformationsmatrix P, die bei Multiplikation mit der Transponierten Matrix: P^{-1} von Links und mit der Matrix P von rechts also mit $P^{-1}*A*P$ die Diagonalmatrix ergibt.

  Lösung :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2 Punkte

In der Transformationsmatrix stehen die 3 Eigenvektoren (+ oder - möglich)

$$1/(\sqrt{6}) \begin{pmatrix} 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2 Punkte

Aufgabe 4: (Koordinatentransformation): (/11)

Gegeben ist der Ortsvektor $a = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ im Ausgangskoordinatensystem $x_1,x_2.x_3$.

Gesucht ist seine Darstellung in einem neuen Koordinatensystem, das sich auf folgende Weise ergibt:

Zunächst wird um die x_3 Achse um 30 Grad gedreht, es entsteht das Koordinatensystem $y_1,y_2.y_3$.

Dann wird um die neue Achse y_1 um - 60 Grad gedreht, es entsteht das Koordinatensystem $z_1,z_2.z_3$.

Wie lauten die Komponenten des Vektors a im Koordinatensysten $z_1,z_2.z_3$?

Man führe dazu die notwendigen Multiplikationen mit geeigneten Drehmatrizen aus
Und gebe das Ergebnis numerisch mit 3 Nachkommastellen an!

Lösung:

Ansatz: Mit α = 30 Grad und β = - 60 Grad ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$ Ansatz 5 Punkte

zu berechnen.

Numerisch ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}866) \\ 0 & 0{,}866) & 0{,}5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 1000 \end{pmatrix} =$$

Berechnung 6 Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}866) \\ 0 & 0{,}866) & 0{,}5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2830 \\ -5098 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2830 \\ -3415 \\ -3915 \end{pmatrix}$$

Oder man multipliziert zuerst die beiden Matrizen. Jeder Schritt 3 Punkte

Vorschlag Notenschlüssel:

0 -20 Punkte	Note 5,0	mindestens also 4/10
21-23 Punkte	Note 4,0	
24-26 Punkte	Note 3,7	
27-30 Punkte	Note 3.3	ab ca der Hälfte eine 3
31-33 Punkte	Note 3,0	
34-36 Punkte	Note 2,7	
37-40 Punkte	Note 2,3	
41-43 Punkte	Note 2,0	
44-46 Punkte	Note 1,7	
47-50 Punkte	Note 1,3	
51-54 Punkte	Note 1,0	nur die Besten eine 1.

Bei halben Punkten aufrunden