Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **WS 2006/07**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller:	Pöschl, Warendorf, Kloster

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!
(Ausnahme: Aufgabe 1, wo die richtige Angabe genügt.)

Name:	Geb. – Datum	Punkte: (/ 40)
Vorname:	Stud.- Gruppe	Korr:
Raum/Platz-Nr:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: **(Matrizen- und Vektorrechnung, Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen, lineare Gleichungssysteme** **(/4)**
(Jedes richtige Kreuz ergibt 1/2 Punkt, jedes falsche 1/2 Punkt Abzug, bei negativen Werten werden 0 Punkte eintragen)
Aufgabensteller : P.

Eine 3 mal 3 Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, , $\lambda_3 = 3$.
Welche der nachstehenden Aussagen sind richtig bitte ankreuzen):

☐ Die Determinante von A ist 1 ☐ Die Determinante von A ist 10

☐ Die Determinante von A ist 2 ☒ Die Determinante von A ist 6

☐ Die Eigenvektoren von A sind linear abhängig

☐ Die Eigenvektoren von A sind immer orthogonal

☒ Die Eigenvektoren von A sind linear unabhängig

☐ A^{-1} hat den Eigenwert ⅛

☒ A^{-1} hat den Eigenwert ½

☐ A^{-1} hat den Eigenwert ¼

☒ A ist diagonalisierbar

☒ A ist invertierbar ☐ A ist singulär

☐ Rang(A) ≤ 2 ☒ Rang(A) = 3

☐ Spur(A) = 3 ☒ Spur(A) = 6 ☐ Spur(A) = 10

$$A^* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ hat ☒ genau eine Lösung ☐ keine Lösung ☐ unendlich viele Lösungen

Aufgabe 2 : (Lineare Abhängigkeit und Orthogonalität von Vektoren) (/9)
Aufgabensteller: P.

Gegeben sine die 3 Vektoren:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; z = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Welche Bedingung muss zwischen a und b gelten, damit x, y und z linear unabhängig sind ? (/3)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & b \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b-2a \\ 0 & 2 & 2-3a \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 2+2b-7a \end{matrix}$$

1 1

Es muß $2 + 2b - 7a \neq 0$ sein!

1

b) Für welche Werte der reellen Parameter a und b ist der Vektor z orthogonal zu x und zu y ? (/2)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \to a + 2b + 6 = 0$$

1

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -b + 4 = 0$$

$b = 4$ 1

$a = -14$

c) Man setzte a = 0 und bilde eine Matrix A mit den 3 Vektoren als Spalten. (/4)
Für welche Werte von b existiert die inverse Matrix A^{-1} und wie lautet sie ?
(Die Wahl des Lösungsweges ist frei, die Rechenschritte müssen erkennbar sein).

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & b \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

-2, -3

$$\downarrow$$

1/2 +2

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$-\frac{b}{2+2b}$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 2+2b \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{matrix}$$

1/2

1

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-4+3b}{2+2b} & \frac{2}{2+2b} & \frac{-b}{2+2b} \\ \frac{-7}{2+2b} & \frac{2}{2+2b} & \frac{1}{2+2b} \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2+2b}\begin{pmatrix} 2+2b & 0 & 0 \\ 4-3b & -2 & b \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1

Die Inverse existiert für $b \neq -1$ 1

Aufgabe 3: (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix) (/10)
Aufgabenstellerin: K.

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A. (/4)
Der Rechenweg muss erkennbar sein!

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2-3)$$ 1 1

$\lambda_1 = 1$ 1

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -1 \end{array}\right\}$ 1

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zu den jeweiligen Eigenwerten. (/6)
in normierter Darstellung (Wenn Sie die Eigenwerte nicht ermitteln konnten, rechnen Sie in den weiteren Aufgaben mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$ weiter):

EV zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$$ 1

x_1 beliebig

$EV_{\lambda_1} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ normiert $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

EV zu $\lambda_2 = 3$

$$\begin{matrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \Rightarrow EV_{\lambda_2} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 1

normiert $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1

EV zu $\lambda_3 = -1$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$ 1

$x_1 = -x_3$ $\quad EV_{\lambda_3} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$3x_2 = -x_3$

normiert $\frac{1}{\sqrt{\;}} \begin{pmatrix} 3 \\ \vdots \end{pmatrix}$ 1

Aufgabe 4 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter) (/8)
Aufgabenstellerin: K.

Stellen Sie mit Hilfe des Gauss Algorithmus fest:
Für welche Werte des reellen Parameters t besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & -2 \\ 2x_1 + x_2 & = & 0 \\ -x_2 + tx_3 & = & 5t \\ x_3 + 2tx_4 & = & 2 \end{array}$$

a) keine Lösung?
b) unendlich viele Lösungen?!
c) genau eine Lösung?

Berechnen Sie die Lösungen in den Fällen b) und c) sofern vorhanden!
Zur Vereinfachung der Rechnung kann im Fall c) ggf. t = 1 gesetzt werden.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 & 5t \\ 0 & 0 & 1 & 2t & 2 \end{array}\right) \cdot 2$$

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & t & 0 & 5t \\ 0 & 0 & 1 & 2t & 2 \end{array}\right) \quad 1$$

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & t+2 & 0 & 5t+4 \\ 0 & 0 & 1 & 2t & 2 \end{array}\right) \quad 1$$

$\downarrow t \neq 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & t+2 & 0 & 5t+4 \\ 0 & 0 & 0 & 2t(t+2) & -3t \end{array}\right) \quad 1 \quad III\cdot(t+2)-II$$

a) Für $t=-2$ keine Lösung 1

b) Für $t=0$ unendlich viele Lösungen 1

c) Für $t\neq -2$ und $t \neq 0$ genau eine Lösung 1

zu b):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

x_4 beliebig, $x_3=2$, $x_2=0$, $x_1=-2+x_3=0$

also $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 1

zu c): Wir setzen $t=1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right) \quad 1$$

$x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation): (/9)
Aufgabenstellerin: W.

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$$-x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - \frac{9}{2} = 0\,.$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel). (Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.) Wie groß ist der Drehwinkel?

Der Drehwinkel ist $\arctan\left(\frac{2}{1}\right) = 26{,}265$ Grad (/5)

1

$$\vec{x}^T \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}\right\} \; 1$$

EV zum EW $\lambda_1 = -2$ (normierte Darstellung)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \vec{x}_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; 1$$

EV zum EW $\lambda_2 = 3$ (normierte Darstellung)

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \vec{x}_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; 1$$

Orientierungstest $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$ i. O. $\Longrightarrow$

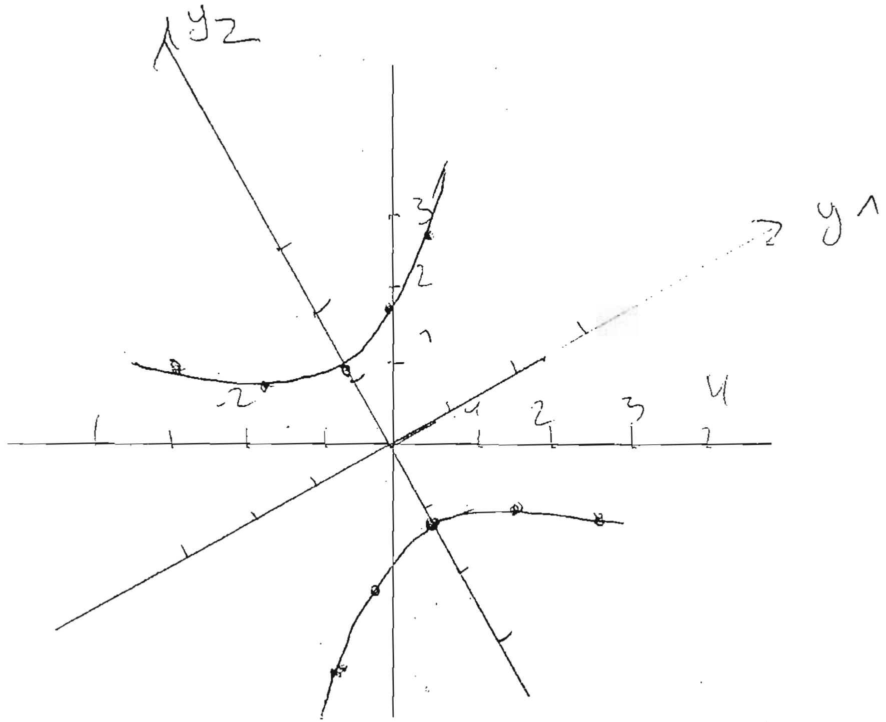
$$y^T \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} - \frac{9}{2} = 0 \quad 1$$

$$-2y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{9}{2} = 0$$

$$-\frac{y_1^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y_2^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve. Bitte Wertetabelle erstellen!

(/4)



3

Wertetabelle für die Hyperbel

$-4\,y_1^2 + 6\,y_2^2 = 9$

1

y_1	0	±1	±2
y_2	±1.22	±1.47	±2.04

$y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = \pm\sqrt{\frac{9}{6}} \approx 1.22$

$y_1 = \pm 1 \Rightarrow y_2 = \pm\sqrt{\frac{13}{6}} \approx 1.47$

$y_1 = \pm 2 \Rightarrow y_2 = \pm\sqrt{\frac{25}{6}} \approx 2.04$