**Fachhochschule München** **Fakultät 03 FA** WS 2007_8

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) -- Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Kloster, Pöschl, Plöchinger, v. Tapavicza
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
**Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Name:** | **Geb. – Datum** | **Punkte:** | ( / 40) |
| **Vorname:** | **Stud.- Gruppe** | **Korr:** | |
| **Raum/Platz-Nr:** | **Aufsicht:** | **Note:** | |

**Aufgabe 1: (Matrizenprodukte max = 8 Punkte)** ( /8)

Gegeben sind die Matrizen::

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

1/2

$A_1 \cdot A_3$ ; $A_4 \cdot A_2$ ; $A_4 \cdot A_5$ ; $A_3 \cdot A_2$ ; $A_3 \cdot A_5$ ; $A_3 \cdot A_4$ ; $A_5 \cdot A_3$ ; $A_2 \cdot A_1$ 8×

Geben Sie an, welche Matrixprodukte $A_i{*}A_j$ möglich sind und berechnen Sie diese!

1/2
$$A_1 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1/2
$$A_4 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -21 \end{bmatrix}$$

1/2
$$A_4 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 11 \\ 1 & -23 & 0 \end{bmatrix}$$

1/2
$$A_3 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

1/2
$$A_3 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -17 & 30 \\ 2 & -4 & 3 \\ 14 & -14 & 22 \end{bmatrix}$$

1/2
$$A_3 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 31 \\ -3 & 5 \\ -10 & 24 \end{bmatrix}$$

1/2
$$A_5 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 36 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1/2

**Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem, max = 6 Punkte)**

Ermitteln Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems: ( /6)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | R.S | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | $\|\cdot(-1)$ |
| 1 | 1 | -1 | 1 | 3 | $\|\cdot(-1)$ + |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | + |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 |
| 0 | 0 | -2 | 0 | -2 | $\|:(-2)$ Tausch der Zeilen |
| 0 | -2 | 0 | -2 | -4 | $\|:(-2)$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |

Aus Gl. (3) $\Rightarrow$ $\boxed{x_3 = 1}$ 1

Aus Gl. (2) $\Rightarrow$ $\boxed{x_2 = 2 - x_4}$ bzw $\boxed{x_4 = 2 - x_2}$ 1

entsprechend $\boxed{x_4 = \text{bel.} = \varkappa}$ " $\boxed{x_2 = \text{beliebig} = \tau}$ 1

Eingesetzt in (1) : $x_1 = 5 - x_2 - x_3 - x_4$ $\boxed{x_1 = 2}$ 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varkappa \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter max = 8 Punkte)**

Für welche Werte des reellen Parameters $\alpha$ besitzt das lineare Gleichungssystem ( /8)

$$\alpha x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + \alpha x_2 = -3$$

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen?
c) genau eine Lösung?
d) Man berechne die Lösungen in den Fällen b) und c)

| $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|
| $\alpha$ | 1 | 3 |
| 1 | $\alpha$ | -3 |
| 1 | $\alpha$ | -3 |
| 0 | $1-\alpha^2$ | $3+3\alpha$ |

$+ \quad 1\cdot(-\alpha)$ (2)

$\Rightarrow (1+\alpha)(1-\alpha)x_2 = 3(1+\alpha)$

a) $\boxed{\alpha = +1} \Rightarrow$ keine Lsg (1) (2. Zeile: $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 6$ !)

b) $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow \infty$-viele Lsgn (1)

c) $\boxed{-1 \neq \alpha \neq +1}$ genau eine Lsg (1)

d) zu b) $x_2 = \text{beliebig} = \tau \Rightarrow$ aus (1) $x_1 = -3 + x_2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (1)

zu c) $x_2 = \frac{3(1+\alpha)}{1-\alpha^2} = \frac{3}{1-\alpha}$ ; $x_1 = -3 - \alpha \cdot x_2 = -3 - \frac{3\alpha}{1-\alpha}$

$x_1 = \frac{-3}{1-\alpha}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{1-\alpha}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (2)

**Aufgabe 4: (Berechnung der inversen Matrix max = 6 Punkte)**

Gesucht ist die inverse Matrix $D^{-1}$ der gegebenen Matrix D:
Das Ergebnis allein genügt nicht. Es müssen auch Zwischenschritte der Rechnung dargestellt werden

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

( /6)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 4 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| | 4 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | -2 | 1 | 0 |
| | 0 | -3 | -2 | -4 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1/2 | -1 | 1/2 | 0 |
| | 0 | 0 | -1/2 | -7 | 3/2 | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | -13 | 3 | 2 |
| | 0 | 1 | 0 | -8 | 2 | 1 |
| | 0 | 0 | 1 | 14 | -3 | -2 |
| | 1 | 0 | 0 | -5 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | -8 | 2 | 1 |
| | 0 | 0 | 1 | 14 | -3 | -2 |

$|\cdot(-2)$ $|\cdot(-4)$ +

$|:2$ $|\cdot\frac{3}{2}$ +

$|\cdot(-2)$ + $\cdot 2$

$|\cdot(-1)$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \\ 14 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1

**Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation max = 12 Punkte)**

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$3x_1^2 \;-\; 2\sqrt{2}\,x_1x_2 \;+\; 4x_2^2 - 10 = 0\,.$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel). (Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.) Gebe Sie den Drehwinkel $\alpha$ und die Gleichung der Transformation vom $x_1x_2$ ins gedrehte $y_1y_2$ System an!

( /8)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}; \quad a_0 = -10$

<u>1. Berechnung der Eigenwerte</u>

$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\rightsquigarrow$ charakt. Gl.: $(3-\lambda)(4-\lambda) - (-\sqrt{2})^2 = 0$

$12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$ 2

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{+7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2}$ $\quad \lambda_{1,2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} = \left\langle \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}} \right.$

<u>2. Berechnung der Eigenvektoren</u>

Zu $\lambda_1 = 5 \Rightarrow$ Eigenvektor $\vec{x}_1 \Rightarrow$ normiert: $\vec{n}_1$

$\begin{pmatrix} 3-5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{matrix} -2x_{11} - \sqrt{2}\,x_{12} = 0 \\ -\sqrt{2}\,x_{11} - x_{12} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{12} = -\sqrt{2}\,x_{11} = -\sqrt{2}\,\varkappa$ $\quad x_{11} = \varkappa = \text{beliebig}$

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 1 zu $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_{21} - \sqrt{2}\, x_{22} = 0 \\ -\sqrt{2}\, x_{21} + 2 x_{22} = 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x_{22} = \mu = \text{bel.} \\ x_{21} = \sqrt{2}\, x_{22} = \sqrt{2}\,\mu \end{matrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

3) Transformationsmatrix $\quad P = T = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = +1 \checkmark \quad (1)$$

4) Drehwinkel $\quad \alpha = \arctan\left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{1}\right)$

$$\rightsquigarrow \boxed{\alpha = -54{,}7^\circ} \quad (1)$$

5) Kurve im gedrehten System

$$\vec{x} = P \cdot \vec{y} \quad ; \quad \underbrace{y^T \cdot D \cdot y}_{D:\ \text{Diagonalmatrix}} - a_0 = 0$$

$$5 y_1^2 + 2 y_2^2 - 10 = 0 \quad | : 10 \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{5} = 1 \Rightarrow \text{Ellipse} \quad (1)$$

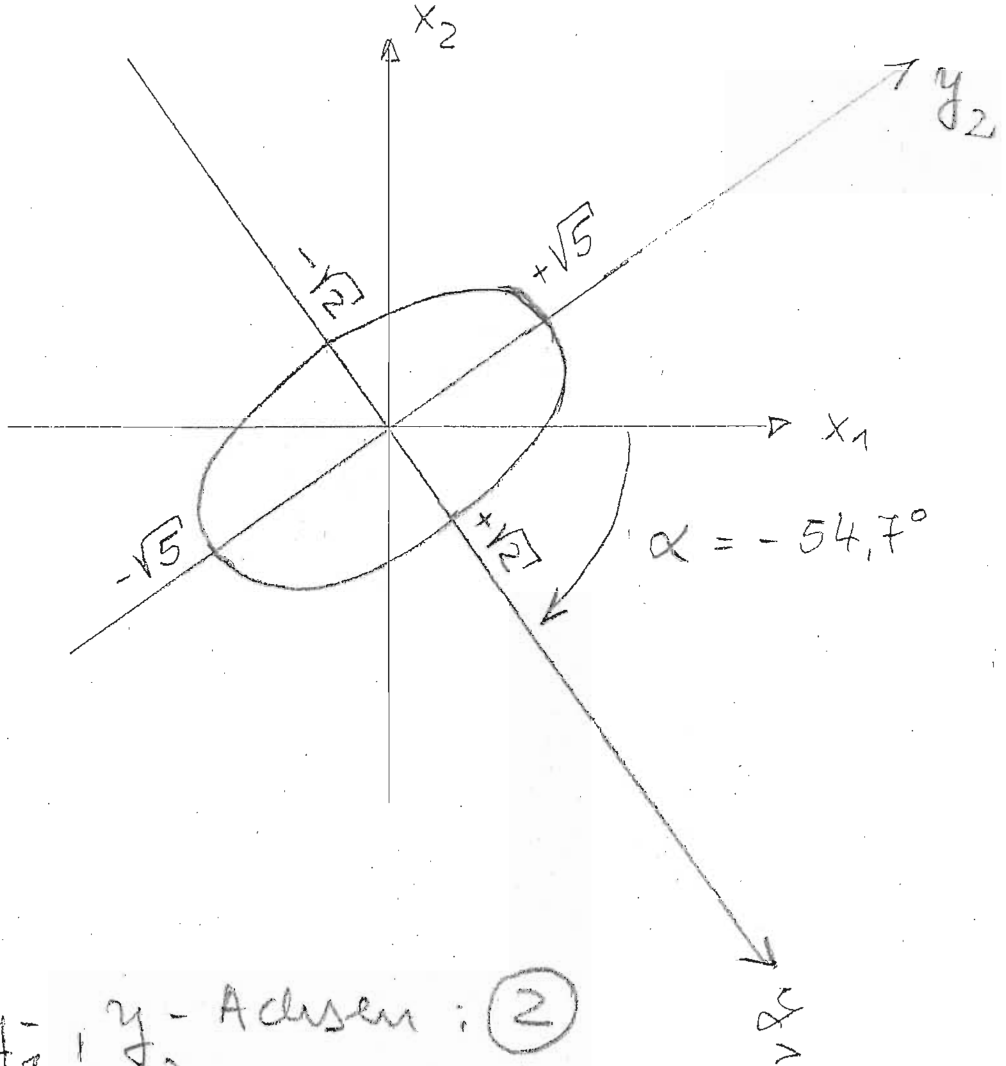
mit den Halbachsen

in $y_1$-Ri.: $a = \sqrt{2}$

" $y_2$-Ri.: $b = \sqrt{5}$ (1)

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im $x_1,x_2$ System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

( /4)




$\alpha$, $y_1$, $y_2$ - Achsen : 2

Halbachsen, Ellipse : 2