Hochschule München **Fakultät 03 FA** **WS 2008_2009**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Pöschl, Tapavicza, Warendorf

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte:** (56 / ~~60~~)
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: (Hauptachsentransformation): (/12)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$$1476x_1^2 + 1536x_1x_2 + 1924x_2^2 - 22500 = 0 .$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel). (Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.) (/8)

$$A = \begin{pmatrix} 1476 & 768 \\ 768 & 1924 \end{pmatrix} \qquad a_0 = -22500 \qquad \vec{a} = \vec{0}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} (1476-\lambda) & 768 \\ 768 & (1924-\lambda) \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad 1/2$$

$$0 = (1476-\lambda)(1924-\lambda) - 768^2 =$$

$$= \lambda^2 - 3400\lambda + 2839824 - 589824 =$$

$$= \lambda^2 - 3400\lambda + 2250000 = 0 \quad 1/2$$

Platz für Rechnungen der Seite 1

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{3400 \pm \sqrt{3400^2 - 4\cdot 2250000}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{3400 \pm 1600\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 2500 \quad (1/2) \quad ; \quad \lambda_2 = 900 \quad (1/2)$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2500$

$$\begin{pmatrix} (-2500+1476) & 768 \\ 768 & (-2500+1924) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} (1/2) \quad \left.\begin{matrix} -1024\, x_{11} + 768\, x_{12} = 0 \\ 768\, x_{11} - 576\, x_{12} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{11} = 0{,}75\, x_{12} \quad (1/2)$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} +0{,}75 \\ +1 \end{pmatrix} (1/2) \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} +0{,}6 \\ +0{,}8 \end{pmatrix} (1/2)$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 900$

$$\begin{pmatrix} (1476-900) & 768 \\ 768 & (1924-900) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} (1/2) \quad \left.\begin{matrix} 576\, x_{21} + 768\, x_{22} = 0 \\ 768\, x_{21} + 1024\, x_{22} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{21} = -\frac{4}{3} x_{22} \quad (1/2)$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} -1{,}33 \\ +1 \end{pmatrix} (1/2) \Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} (1/2)$$

$$P = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \begin{pmatrix} +0{,}6 & -0{,}8 \\ +0{,}8 & +0{,}6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = +1 \quad (1/2)$$

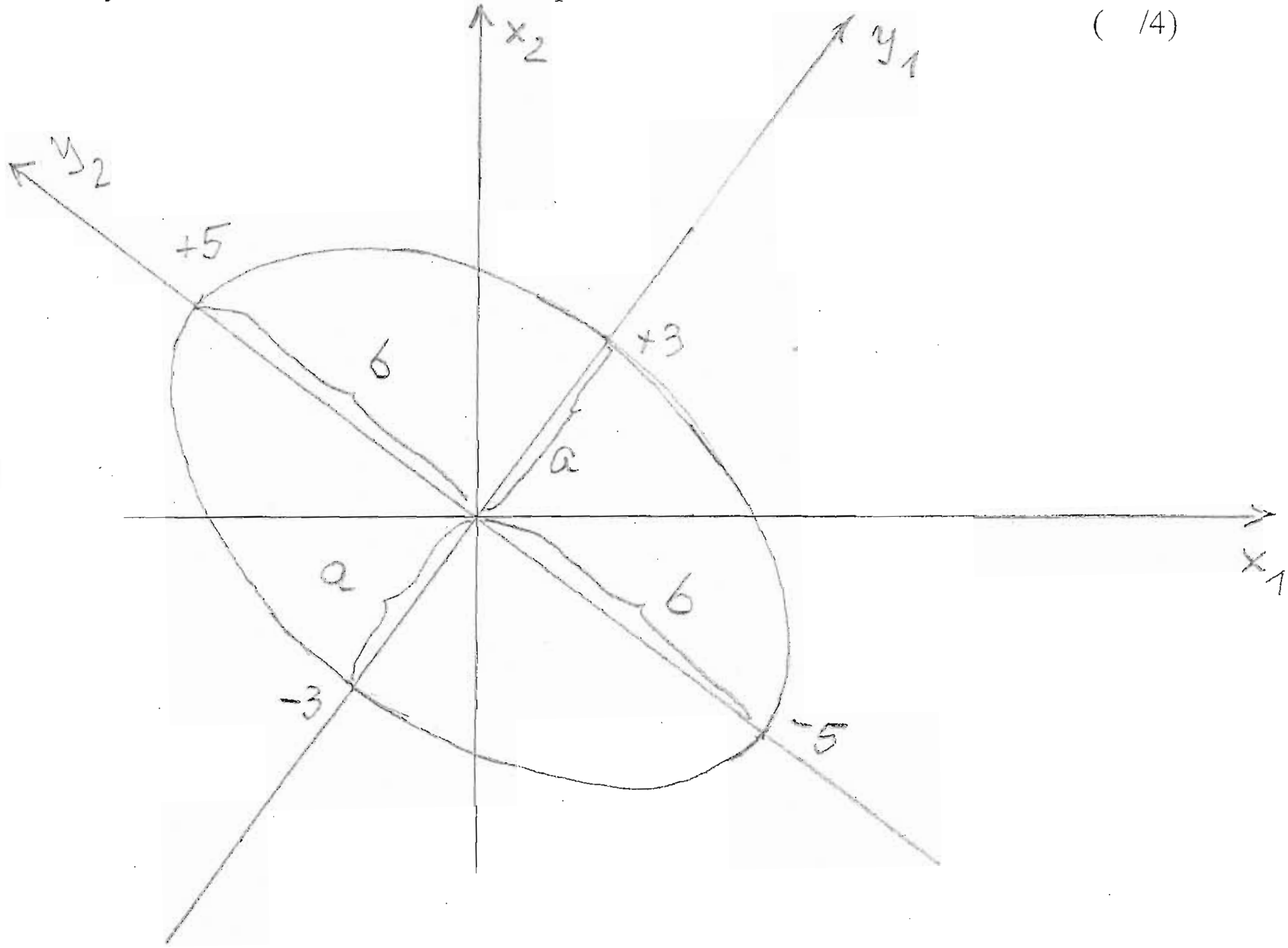
Kurvengleichung im KS $y_1 y_2$

$$(1/2) \quad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 - a_0 = 0 = 2500\, y_1^2 + 900\, y_2^2 - 22500 \quad | : 22500$$

$$(1/2) \quad \left(\frac{y_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$ Ellipse mit Halbachsen $a = 3$ u. $b = 5$ (1/2)

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems y_1,y_2 im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/4)



Achsenkreuz : 2

Ellipse : 2

Aufgabe 2 : (Eigenwerte, Eigenvektoren) (/12)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix. (/4)

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \\ 0 & 2 \end{matrix} \overset{!}{=} 0$$

1/2

$$0 = (3-\lambda)^2(1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 4(3-\lambda) - 4(3-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)\{(3-\lambda)(1-\lambda) - 8\} = (3-\lambda)[3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8]$$

$$= (3-\lambda)(5-\lambda)(-1)(1+\lambda)$$

1 1/2

Nebenrechnung:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot(-5)}}{2} = \frac{+4 \pm 6}{2} = \begin{cases} +5 \\ -1 \end{cases}$$

1/2 1/2

$\lambda_1 = +5$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = -1$

1

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix (/8)

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 5$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -2x_{11} - 2x_{12} = 0 \Rightarrow x_{11} = -x_{12} \quad \frac{1}{2} \\ -2x_{11} - 4x_{12} + 2x_{13} = 0 \\ 2x_{12} - 2x_{13} = 0 \Rightarrow x_{13} = x_{12} \quad \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{e}_1 = \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -2x_{22} = 0 \Rightarrow x_{22} = 0 \quad 1 \\ -2x_{21} - 2x_{22} + 2x_{23} = 0 \Rightarrow x_{21} = x_{23} \quad \frac{1}{2} \\ 2x_{22} = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{e}_2 = \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -1$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} 4x_{31} - 2x_{32} = 0 \Rightarrow x_{32} = 2x_{31} \quad \frac{1}{2} \\ 2x_{32} + 4x_{33} = 0 \Rightarrow x_{32} = -2x_{33} \quad \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} x_{33} = -x_{31}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \varkappa \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{e}_3 = \vec{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem) (/ 8)

Berechnen Sie die Lösung(en) des linearen Gleichungssystems:
Und geben Sie diese in vektorieller Form an!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	RS	
1	2	3	1	1	$1\cdot(-2)$ $1\cdot(-5)$
2	1	−1	0	2	+ +
5	7	8	2	3	
1	2	3	1	1	
0	−3	−7	−2	0	$1\cdot 1$ + 1
0	−3	−7	−3	−2	$1\cdot(-1)$ 1
1	2	3	1	1	(I)
0	3	7	2	0	(II)
0	0	0	1	2	(III) $\Rightarrow$ $\boxed{x_4=2}$ 1

1

Aus (II) $\Rightarrow 3x_2+7x_3+2\cdot 2=0 \Rightarrow \boxed{x_2=-\frac{1}{3}(4+7x_3)}$ 1

Aus (I) $\Rightarrow x_1 = 1-2x_2-3x_3-x_4$

$$= 1+\frac{8}{3}+\frac{14}{3}x_3-3x_3-2 = \boxed{\frac{5}{3}+\frac{5}{3}x_3 = x_1}$$ 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 + 5/3\,x_3 \\ -4/3 - 7/3\,x_3 \\ 0 + x_3 \\ 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \varkappa \begin{pmatrix} 5/3 \\ -7/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 1

(5a)

Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem) (/ 8)

Berechnen Sie die Lösung(en) des linearen Gleichungssystems:
Und geben Sie diese in vektorieller Form an !

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Gaußscher Algorithmus gleich (3)

$x_4 = 2$ (1)

Aus (II) $\Rightarrow$ $x_3 = -\frac{1}{7}(4 + 3x_2)$

Aus (I) $\Rightarrow$ $x_1 = 1 - 2x_2 + \frac{3}{7}(4 + 3x_2) - 2$

$x_1 = +\frac{5}{7} - \frac{5}{7}x_2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +5/7 - 5/7\, x_2 \\ 0 + x_2 \\ -4/7 - 3/7\, x_2 \\ 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 0 \\ -4/7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5/7 \\ 1 \\ -3/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Lineares Gleichungssystem mit Parameter (/ 12)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter b:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - bx_3 &= 1 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - bx_3 &= b \end{aligned}$$

Für welche Werte des reellen Parameters b besitzt das lineare Gleichungssystem

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen ?
c) genau eine Lösung ?
d) Man berechne die Lösung für den Fall b)
   und für den Fall c) in Abhängigkeit vom Parameter b.

x_1	x_2	x_3	RS	
+1	+1	−b	+1	$\mid \cdot (-2)$
0	−1	+1	+2	+
+2	+3	−b	+b	
+1	+1	−b	+1	
0	−1	+1	+2	+
0	+1	b	b−2	1
+1	+1	−b	+1	I
0	+1	−1	−2	II 1
0	0	b+1	b	III 1

a) keine Lösung bei b = −1 1

b) es gibt kein b, bei dem es ∞-viele Lsgn gibt 1

Platz für Bearbeitung von Aufgabe 4

c) genau eine Lsg für $b \neq -1$ 1

d) Aus Gl (III) $\Rightarrow$ $x_3 = \dfrac{b}{b+1}$ (*) 1

(*) in Gl. (II) liefert

$$x_2 = -2 + x_3 = -2 + \frac{b}{b+1} = \frac{-b-2}{b+1} \quad (**) \quad 1$$

(*) und (**) in Gl (I) eingesetzt $\Rightarrow$

$$x_1 = 1 - x_2 + b \cdot x_3 = \quad 1$$

$$= 1 + \frac{b+2}{b+1} + \frac{b^2}{b+1} = \frac{b^2+2b+3}{b+1} \quad 1$$

Lösungsvektor für $b \neq -1$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{b+1} \cdot \begin{pmatrix} b^2+2b+3 \\ -(b+2) \\ +b \end{pmatrix}$$

2

Aufgabe 5: **Koordinatentransformation** (/ 12)

Das Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) wird zuerst um die x_2 – Achse um φ = 40 Grad gedreht.
Es entsteht das Koordinatensystem (x_1', x_2', x_3').

Dieses wird dann um die x_3'- Achse um 55 Grad gedreht.
Es entsteht das Koordinatensystem (x_1'', x_2'', x_3'').

a) Wie lautet die Gesamttransformationsmatrix Q, die direkt vom Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) in das Koordinatensystem (x_1'', x_2'', x_3'') transformiert ? (/ 8)

1/2 1/2

$$Q_2^{40°} = \begin{bmatrix} \cos 40° & 0 & -\sin 40° \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 40° & 0 & \cos 40° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}766 & 0 & -0{,}643 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}643 & 0 & 0{,}766 \end{bmatrix}$$

$$Q_3^{55°} = \begin{bmatrix} \cos 55° & \sin 55° & 0 \\ -\sin 55° & \cos 55° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}574 & +0{,}819 & 0 \\ -0{,}819 & 0{,}574 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1/2 1/2

$$Q = Q_3^{55°} \cdot Q_2^{40°}$$

1 1/2

$$\begin{bmatrix} 0{,}766 & 0 & -0{,}643 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}643 & 0 & 0{,}766 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +0{,}574 & +0{,}819 & 0 \\ -0{,}819 & 0{,}574 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}440 & +0{,}819 & -0{,}369 \\ -0{,}627 & +0{,}574 & +0{,}527 \\ 0{,}643 & 0 & +0{,}766 \end{bmatrix}$$

4 1/2, je 1/2 für die 9 Elemente

b) Berechnen Sie die Koordinaten des im (x_1, x_2, x_3) Koordinatensystem gegebenen Vektors $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$ im (x_1'', x_2'', x_3'') Koordinatensystem (/ 2)

$\vec{a}'' = Q \cdot \vec{a}$ 1/2

$$\begin{bmatrix} +0,440 & +0,819 & -0,369 \\ -0,627 & +0,574 & +0,527 \\ +0,643 & 0 & +0,766 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,588 \\ +1,394 \\ +0,889 \end{bmatrix} = \vec{a}''$$

1/2 1/2 1/2

c) Berechnen Sie die Koordinaten des im (x_1'', x_2'', x_3'') Koordinatensystem gegebenen Vektors $\vec{b}'' = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ im (x_1, x_2, x_3) Koordinatensystem (/ 2)

$\vec{b} = Q^T \cdot \vec{b}''$ 1/2

$$\begin{bmatrix} +0,440 & -0,627 & +0,643 \\ +0,819 & +0,574 & 0 \\ -0,369 & +0,527 & +0,766 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1,947 \\ +1,883 \\ -1,634 \end{bmatrix}$$

1/2 1/2 1/2

$\uparrow \vec{b}$