Fachhochschule München **Fakultät 03 FA** **WS 2009/2010**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Pöschl ,Radtke,Selting
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name: **Geb. – Datum** **Punkte: (/ 43)**

Vorname: **Stud.- Gruppe** **Korr:**

Raum/Platz-Nr: **Aufsicht:** **Note:**

Aufgabe 1: (Eigenwerte, Eigenvektoren von Matrizen max = 9 Punkte) (/ 9)

a) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ (/ 3)

zeige man, dass $\lambda_1 = -5$ ein Eigenwert ist und ermittle die Eigenwerte λ_2 und λ_3 .

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & (-3-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^2(3+\lambda) - 4 - 4 + 4\lambda + (3+\lambda) + 4\lambda \quad 1/2$$

$$0 = (3+\lambda)(1-\lambda^2) + 8(\lambda - 1)$$

$$= (3+\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda) - 8(1-\lambda) = (1-\lambda)\{\lambda^2 + 4\lambda + 3 - 8\} \quad 1$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 5) \quad 1/2$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4\cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} +1 = \lambda_2 \\ -5 = \lambda_1 \end{cases} \quad 1/2$$

1/2

oder $\begin{vmatrix} +5 & -1 & -2 \\ -1 & +5 & -2 \\ -2 & -2 & +2 \end{vmatrix} = 50 - 4 - 4 - 20 - 2 - 20 = 0$ ✓ 1/2

$\lambda = -5$ ist ein EW

$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 5 \overset{!}{=} 0$; da $\lambda_1 = -5 \Rightarrow$ 1/2

Polynomdivision

$$(-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 5) : (\lambda + 5) = -\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$$\begin{array}{l} -(-\lambda^3 - 5\lambda^2) \\ \hline = 2\lambda^2 + 9\lambda \\ -(2\lambda^2 + 10\lambda) \\ \hline = -\lambda - 5 \\ -(-\lambda - 5) \\ \hline = = \end{array}$$

1

$-\lambda^2 + 2\lambda - 1 \overset{!}{=} 0$

$-(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = +1$

1

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten. (/ 6)

EV zu $\lambda_1 = -5$ $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & +2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 5x_{11} - x_{12} - 2x_{13} = 0 \\ -x_{11} + 5x_{12} - 2x_{13} = 0 \\ -2x_{11} - 2x_{12} + 2x_{13} = 0 \end{array}$$

1

$4x_{11} - 2x_{13} = 0 \Rightarrow x_{13} = 2x_{11}$ 1/2

$-3x_{11} + 3x_{12} = 0$

$x_{11} = x_{12}$ 1/2

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \varkappa$ 1

EV zu $\lambda_2 = \lambda_3 = +1$ $\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}$ 1/2

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad x_{21} + x_{22} + 2x_{23} = 0 \Rightarrow x_{21} = -x_{22} - 2x_{23}$$

1/2

$$\vec{x}_2 = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

1 1

Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem, max = 6 Punkte)

Ermitteln Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems: (/6)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \end{array}$$

Geben Sie auch eine vektorielle Darstellung der Lösung an !

x_1	x_2	x_3	x_4	RS	
1	0	1	3	1	$\cdot(-2)$, $\cdot(-1)$
2	4	3	2	2	+
1	3	2	5	4	+
1	0	1	3	1	
0	4	1	-4	0	$\cdot(-3)$ (1)
0	3	1	2	3	$\cdot 4$ +
1	0	1	3	1	(1)
0	4	1	-4	0	
0	0	1	20	12	x_4 beliebig (1/2)

$x_3 = 12 - 20x_4$ (1/2)

$\boxed{x_2 = -3 + 6x_4}$

$x_2 = \frac{1}{4}(-x_3) + x_4 = +5x_4 - 3$ (1)

$x_1 = 1 - x_3 - 3x_4 = 1 - 12 + 20x_4 - 3x_4 = -11 + 17x_4$ (1)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 + 5x_4 \\ -3 + 2x_4 \\ 12 - 8x_4 \\ 0 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1/2) (1/2)

Rechenseite für Aufgabe 2

Aufgabe 3: (Berechnung der inversen Matrix max = 6 Punkte)

Gesucht ist die inverse Matrix D^{-1} der gegebenen Matrix D:
Das Ergebnis allein genügt nicht. Es müssen auch
Zwischenschritte der Rechnung dargestellt werden

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung (A)

(/6)

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 8 + 18 + 4 = -1$$

1/2

je einen halben Pkt für jedes richtige α_{ij} ($\frac{1}{2} \times 9 = 4\frac{1}{2}$ Pkte)

Rechenseite für Aufgabe 3

Lösung (B)

1	3	−1	1	0	0	$\vert\cdot(-2)$
2	5	−1	0	1	0	+ (1)
0	4	−3	0	0	1	
1	3	−1	1	0	0	
0	−1	+1	−2	1	0	$\vert\cdot 4$ +
0	4	−3	0	0	1	(1)
1	3	−1	1	0	0	
0	−1	+1	−2	1	0	$\vert\cdot(-1)$
0	0	1	−8	4	1	+ (1)
1	3	−1	1	0	0	
0	+1	0	−6	3	1	+ (1)
0	0	1	−8	4	1	
1	3	0	−7	4	1	+
0	1	0	−6	3	1	$\vert\cdot(-3)$
0	0	1	−8	4	1	(1)
1	0	0	+11	−5	−2	
0	1	0	−6	3	1	
0	0	1	−8	4	1	

(1)

$$= \frac{1}{\det D}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

(1)

Lösung (A)

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = +6$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = +8$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = +5$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = +2$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

5

Aufgabe 4: (Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren max = 10 Punkte)

Im vierdimensionalen Raum R^4 sind die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einem Parameter t gegeben.

a) Für welche Werte des Parameters t in a_2 und a_3 sind die Vektoren (/ 5)

a_1 , a_2 , a_3 , a_4 linear **un**abhängig ?

$$\det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\right) \neq 0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & t & 1 & 0 \\ 0 & 3 & t & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1$$

entwickelt nach der 4. Spalte

$$\det = (-1)^{1+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 4 & t & 1 \\ 0 & 3 & t \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & t & 1 \\ 0 & 3 & t \end{vmatrix} \quad 1$$

$$= 1 \cdot \left(0 + t^2 + 0 - 3 - 0 - 4t\right) + 1\left(t^2 - 3\right) = \quad 1$$

$$= 2t^2 - 4t - 6 \quad 1$$

1/2

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{+2 \pm 4}{2} \begin{cases} +3 \\ -1 \end{cases}$$

1/2

lin. unabh. für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

b) Für den Parameterwert t = +1 berechne man a_5 als lineare Kombination der anderen 4 Vektoren, d.h. man bestimme die Parameter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 in der Darstellung (/ 5)

$$\vec{a_5} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3} + \lambda_4 \vec{a_4}$$

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	RS	
1	0	0	-1	-4	$1\cdot(-4)$ +, $1\cdot(-1)$ +
4	1	1	0	-11	
0	3	1	0	5	
1	1	0	1	0	
1	0	0	-1	-4	$1\cdot(-3)$ +, $1\cdot(-1)$ +
0	1	1	+4	+5	1
0	3	1	0	5	
0	1	0	2	4	
1	0	0	-1	-4	
0	1	1	4	+5	1
0	0	-2	-12	-10	+
0	0	-1	-2	-1	$1\cdot(-2)$
1	0	0	-1	-4	1
0	1	1	4	5	
0	0	-2	-12	-10	1/2
0	0	0	-8	-8	$\Rightarrow \lambda_4 = +1$

$2\lambda_3 + 12 = 10 \Rightarrow$ $\lambda_3 = -1$ 1/2

$\lambda_2 - 1 + 4 = 5 \Rightarrow$ $\lambda_2 = +2$ 1/2

$\lambda_1 - 1 = -4$ $\lambda_1 = -3$ 1/2

Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation max = 12 Punkte)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 + 15 = 0$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel).

(/8)

$$\det(A-\lambda E)=0=\begin{vmatrix}(9-\lambda) & +12\\ +12 & (16-\lambda)\end{vmatrix}$$

$$0=(9-\lambda)(16-\lambda)-12^2=\lambda^2-25\lambda+144-144 \quad 1/2$$
$$=\lambda(\lambda-25)$$

$1/2$ $\lambda_1=25$; $\lambda_2=0$ $1/2$

EV zu EW $\lambda_1=25$

$$\begin{pmatrix}-16 & +12\\ +12 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{pmatrix} \quad 1/2 \qquad -16x_{11}+12x_{12}=0 \qquad x_{12}=\frac{4}{3}x_{11}$$

$$\vec{x}_1=\varkappa\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_1=\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix} \quad 1/2$$

EV zu EW $\lambda_2=0$ $1/2$

$$\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{pmatrix} \quad 1/2 \qquad 9x_{21}+12x_{22}=0 \qquad x_{21}=-\frac{4}{3}x_{22}$$

$$\vec{x}_2=\varkappa\begin{pmatrix}-4\\+3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_2=\begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}6\end{pmatrix}$$

$$P=(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\begin{pmatrix}0{,}6 & -0{,}8\\ 0{,}8 & 0{,}6\end{pmatrix} \Rightarrow \det P=+1 \checkmark \quad 1/2$$

Rechenseite für Aufgabe 5

$$\begin{pmatrix}-4\\+3\end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\+3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b} = P^T \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}8\\-0{,}8 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\+5\end{pmatrix} \quad 1/2$$

$$W = 25y_1^2 + 0 \cdot y_2^2 + 0 \cdot y_1 + 5y_2 + 15 = 0 \quad 1$$

$$25y_1^2 = -5(y_2+3) \qquad z_1 = y_1 \quad 1/2$$

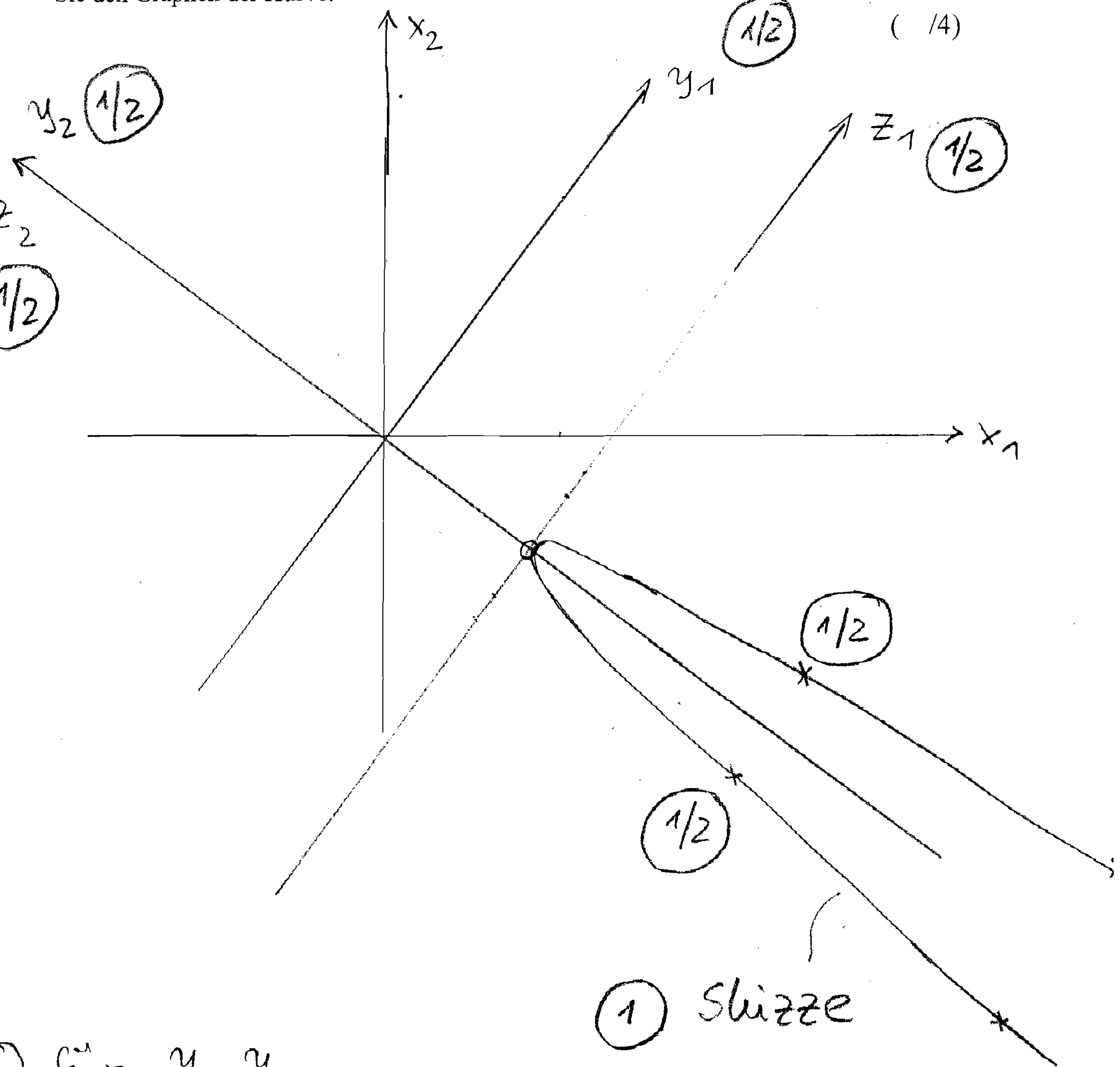
$$-5y_1^2 = y_2 + 3 \qquad z_2 = y_2 + 3 \quad 1/2$$

$$z_2 = -5z_1^2 \quad 1$$

Parabel 1/2

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/4)



1 für y_1, y_2

1 " z_1, z_2

2 für die Parabel