Fachhochschule München **Fakultät 03 FA** **WS 2010-2011**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Pöschl , v. Tapavicza, Warendorf
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name: **Geb. – Datum** **Punkte: (/ 56)**

Vorname: **Stud.- Gruppe** **Korr:**

Raum/Platz-Nr: Aufsicht: Note:

Deckblatt

Aufgabe 1: (Berechnung der inversen Matrix max = 8 Punkte) (/ 8)

Gesucht ist, sofern sie existiert die inverse Matrix D^{-1} der gegebenen Matrix D.
Das Ergebnis allein genügt nicht. Es müssen auch
Zwischenschritte der Rechnung dargestellt werden
(d.h. z.B. alle Minoren berechnet oder die Inverse mit Hilfe des Gaussschen Algorithmus berechnet werden).

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1+t \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Inverse und prüfen Sie für welche t die Inverse nicht existiert.

	1	1	1	1	0	0	+
	-1	0	-1+t	0	1	0	
	0	0	t	0	0	1	
	+1	+1	+1	+1	0	0	1·
1	0	+1	+t	+1	+1	0	1·(-1)
	0	0	+t	0	0	+1	1·(-t) + ; $t \neq 0$
	+1	+1	+1	1	0	0	
0	0	+1	0	+1	+1	-1	
	0	0	t	0	0	1	
1	-t	-t	0	-t	0	1	+
	0	+1	0	+1	+1	-1	1·(t)
	0	0	t	0	0	1	
1	-t	0	0	0	t	1-t	1:(-t) ; $t \neq 0$; 1
	0	+1	0	+1	+1	-1	
	0	0	t	0	0	1	1:t
1/2	1	0	0	0	-1	$-\frac{1}{t}+1$	
1/2	0	1	0	1	1	-1	
1/2	0	0	1	0	0	1/t	

Rechenseite für Aufgabe 1

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1-\frac{1}{t} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \quad 1/2$$

1

oder : $\det D = 0+0+0-0-0+t \neq 0 \Rightarrow$

D^{-1} existiert, wenn $t \neq 0$ 1

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & -1+t \\ 0 & t \end{vmatrix} = 0$

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & -1+t \\ 0 & t \end{vmatrix} = +t$ 1

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{13} = + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{vmatrix} = -t$

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t$

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1+t \end{vmatrix} = -1+t$

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1t \end{vmatrix} = -(-1+t)-1$

$= -t$

$\frac{1}{2}$ $\alpha_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +1$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{t}+1 \\ +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

1/2

Aufgabe 2: Lineares Gleichungssystem mit Parameter (/ 12)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter a:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + ax_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -x_1 - ax_2 + x_3 &= a \end{aligned}$$

Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen ?
c) Man berechne ggf. die Lösungen für den Fall b) in Abhängigkeit vom Parameter a.

	x_1	x_2	x_3	RS	
	1	−1	a	1	$\mid\cdot(-2)$ + +
	2	1	2	−2	
	−1	−a	1	a	
(i)	1	−1	a	1	1
(ii)	0	3	2(1−a)	−4	$\mid\cdot(1+a)$ + (*) 1
	0	−(1+a)	1+a	1+a	$\mid\cdot(+3)$

x_1	x_2	x_3	RS
1	−1	a	1
0	3	$2(1-a)$	−4
0	0	$2(1+a)(1-a)+3(1+a)$	$-4(1+a)+3(1+a)$
0	0	$(1+a)(5-2a)$	$-(1+a)$

$a+1=0$
$a=-1$
∞ - viele Lsg

$a=\frac{5}{2}$
keine Lsg

$a\neq-1,\ a\neq\frac{5}{2}$
genau eine Lsg

Rechenseite für Aufgabe 2

a) keine Lsg für $\boxed{a = +\frac{5}{2}}$ 1

b) ∞-viele Lsgn für $\boxed{a = -1}$ 1

aus (**) $\Rightarrow 3x_2 + 4x_3 = -4 \Rightarrow x_3 = -1 - \frac{3}{4}x_2$ 1

aus (*) $\Rightarrow x_1 = 1 + x_2 + x_3 = 1 + x_2 - 1 - \frac{3}{4}x_2 = \frac{1}{4}x_2$ 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_2 \\ x_2 \\ -1 - \frac{3}{4}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \varkappa \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$ 1

c) genau eine Lsg, wenn $-1 \neq a \neq \frac{5}{2}$

aus (iii) $\Rightarrow x_3 = \frac{-1}{5-2a}$ 1/2

aus (ii) $\Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}\left(-4 - \frac{2(1-a)\cdot(-1)}{5-2a}\right)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{-20 + 8a + 2 - 2a}{5-2a} = \frac{-6+2a}{5-2a}$$ 1

aus (i) $\Rightarrow x_1 = 1 + \frac{-6+2a}{5-2a} - a \cdot \frac{-1}{5-2a}$

$$= \frac{5 - 2a - 6 + 2a + a}{5-2a} = \frac{-1+a}{5-2a}$$ 1

$$\vec{x} = \frac{1}{5-2a}\begin{pmatrix} -1+a \\ -6+2a \\ -1 \end{pmatrix}$$ 1/2

5

LA - Klausur WS 2010-11 $\S$ 5a (4a)

x_1	x_2	x_3	RS
1	-1	a	1
0	3	$2(1-a)$	-4
0	0	$2(1+a)(1-a)+3(1+a)$	$-4(1+a)+3(1+a)$
0	0	$(1+a)(5-2a)$	$-(1+a)$

$a+1=0$
$a=-1$
∞ - viele Lsg

$a=\frac{5}{2}$
keine Lsg

$a\neq -1,\ a\neq \frac{5}{2}$
genau eine Lsg

d) $\boxed{\text{für } a=-1}$ $\Rightarrow x_3$ beliebig

aus (2) $\Rightarrow$ $x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2(1-a)}{3}x_3 = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_3$

aus (1) $\Rightarrow$ $x_1 = 1 + x_2 - a\cdot x_3 = 1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \varkappa \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\boxed{-1 \neq a \neq \frac{5}{2}}$

$$x_3 = -\frac{1}{5-2a}$$

$$x_2 = -\frac{4}{3} + \frac{2(1-a)}{3(5-2a)} = \frac{-20+8a+2-2a}{3(5-2a)} \quad \frac{-18+6a}{3(5-2a)} = \frac{-6+2a}{5-2a}$$

$$x_1 = 1 + x_2 - a\cdot x_3 = 1 + \frac{-6+2a}{5-2a} + \frac{a}{5-2a} = \frac{5-2a-6+2a+a}{5-2a} = \frac{-1+a}{5-2a}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{5-2a}\begin{pmatrix} -1+a \\ -6+2a \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Koordinatentransformation (/ 12)

Das Koordinatensystem ($x_1, x_2. x_3$) wird zuerst

a) um die x_2–Achse um den Winkel $\beta = \arctan(0.75)$ gedreht ($0 <= \beta <= 180$ Grad), es entsteht das Koordinatensystem ($x_1', x_2'.x_3'$). Nutzen Sie für β alle verfügbaren Stellen, die der Taschenrechner liefert.

b) Dieses wird anschließend um die neue Achse x_1' um -90 Grad gedreht. Es entsteht das Koordinatensystem (x_1'', x_2'', x_3'').

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{bmatrix} 500 \\ -300 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} 100 \\ -200 \\ -100 \end{bmatrix}, \quad c'' = \begin{bmatrix} -400 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Gesucht sind a'' und b und b'' und c.

Anleitung: Berechnen Sie dazu zunächst die beteiligten Drehmatrizen und die Matrix der Gesamttransformation.

a) $\beta = 36{,}86989765°$ (1) $\Rightarrow \sin\beta = 0{,}6$ (1/2) $\cos\beta = 0{,}8$ (1/2)

$$Q_2^{\beta} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & -0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(2)

$$Q_1^{-90°} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & \sin(-90°) \\ 0 & -\sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{ges} = Q_1^{-90} \cdot Q_2^{\beta} \quad (1/2)$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & -0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ -300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Rechenseite für Aufgabe 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & 0 & -0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 280 \\ -460 \\ -300 \end{pmatrix} \vec{a}''$$

$1\frac{1}{2} \Rightarrow Q_{ges}$

$$\vec{a}'' = Q_{ges} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 280 \\ -460 \\ -300 \end{pmatrix} \quad 1/2 \qquad \begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ -100 \end{pmatrix}$$

1/2

$$\vec{b} = \left(Q_2^{\beta}\right)^T \cdot \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}6 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -200 \\ -140 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

1/2

$$\begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}'' = Q_1^{-90^\circ} \cdot \vec{b}' =$$

1/2

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ -200 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

$$\vec{c} = Q_{ges}^T \cdot \vec{c}'' = \begin{pmatrix} -400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

1/2

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}6 & -0{,}8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -440 \\ 300 \\ 80 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

Aufgabe 4: (Vektoren, Vektorprodukt, LGS max = 11 Punkte) (/ 12)

a) Die Vektoren

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ spannen eine Ebene im 3-dimensionalen Raum auf.

Gesucht ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit 3 aufeinander senkrecht stehenden Achsen (Vektoren nicht normiert). Dabei soll a nicht verändert werden, ein Vektor b_{neu} soll in der von a und b aufgespannten Ebene senkrecht zu a sein und der dritte Vektor n ist der Normalenvektor der Ebene, also ein Vektor senkrecht zu a und b.
Die Vektoren (a, b_{neu} , n) bilden dann ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

1) Man finde die Vektoren n und b_{neu}. (/ 4)

2) Welche Darstellung hat (/ 7)

der Vektor $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 45 \end{bmatrix}$ in diesem System?

Anleitung : Mit einem ersten Vektorprodukt findet man den Normalenvektor n der Ebene, mit einem geeigneten zweiten Vektorprodukt kann man den Vektor b durch einen Vektor b_{neu} ersetzen, der zu a und n senkrecht ist.

Wenn Sie b_{neu} nicht finden konnten rechnen Sie mit $b_{neu} = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ weiter.

1

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\vec{b}_{neu} = \vec{n} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 1$$

1

Rechenseite für Aufgabe 4

$\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}_{neu} + \lambda_3 \cdot \vec{n}$ 1

	λ_1	λ_2	λ_3	RS	
	1	9	2	3	$1 \cdot (-2)$ + ; $1 \cdot (-1)$ +
	2	-6	1	6	
	1	3	-4	45	
	1	9	2	3	
1	0	-24	-3	0	+
0	0	-6	-6	42	$1 \cdot (-4)$
(i)	1	9	2	3	
(ii)	0	24	3	0	
1	0	0	21	-168	$\Rightarrow \lambda_3 = -8$ 1

aus (ii) $\Rightarrow 24\lambda_2 = -3 \cdot \lambda_3 = -3 \cdot (-8) = +24$ 1

$\Rightarrow \lambda_2 = +1$

0

aus (i) $\Rightarrow \lambda_1 = 3 - 9\lambda_2 - 2\lambda_3$

$= 3 - 9 - 2 \cdot (-8) =$ 1

$= 3 - 9 + 16 = +10$

$$\vec{c} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 45 \end{pmatrix}$$

1

eurocopter
an EADS Company

9a

Tapa, 24.1.11

Aufgabe 4

a) Bestimmung von $\underline{n}$:

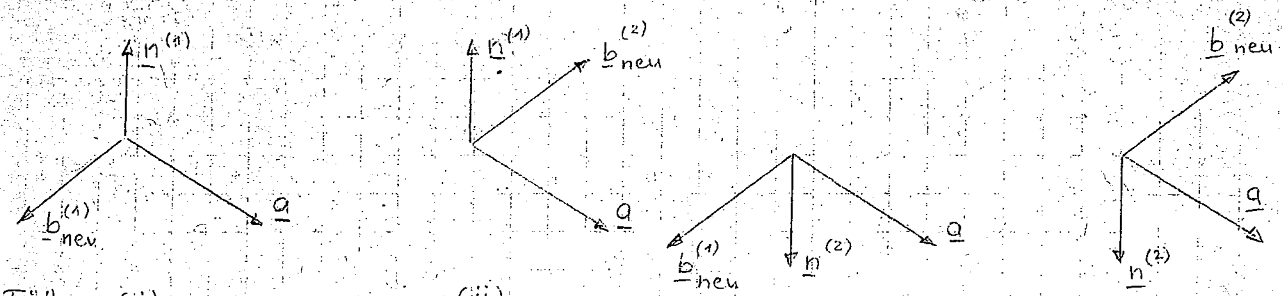
$$\underline{n}^{(1)} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [2, 1, -4]^T \qquad 1 + 1$$

oder $\underline{n}^{(2)} = -\underline{n}^{(1)} = [-2, -1, +4]^T$

b) Bestimmung von $\underline{b}_{neu}$

$\underline{b}^{(1)}_{neu} = \underline{a} \times \underline{n}^{(1)} = \underline{n}^{(2)} \times \underline{a}$ oder $\underline{b}^{(2)}_{neu} = \underline{a} \times \underline{n}^{(2)} = \underline{n}^{(1)} \times \underline{a} = -\underline{b}^{(1)}_{neu}$

$$= \begin{vmatrix} & & \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = [-9, +6, -3]^T \qquad 1+1 \qquad = \begin{vmatrix} & & \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = [9, -6, +3]^T$$



Fälle (i) (ii) (iii) (iv)

(i): $\underline{a}^T = [1 \;\; 2 \;\; 1]$, $\underline{b}^{(1)T}_{neu} = [-9 \;\; 6 \;\; -3]$, $\underline{n}^{(1)} = [2 \;\; 1 \;\; -4]$

(ii): $\underline{a}^T = [1 \;\; 2 \;\; 1]$, $\underline{b}^{(2)T}_{neu} = [9, -6, 3]$, $\underline{n}^{(1)} = [2 \;\; 1 \;\; -4]$

(iii): $\underline{a}^T = [1 \;\; 2 \;\; 1]$, $\underline{b}^{(1)T}_{neu} = [-9 \;\; 6 \;\; -3]$, $\underline{n}^{(2)T} = [-2 \;\; -1 \;\; 4]$

(iv): $\underline{a}^T = [1 \;\; 2 \;\; 1]$, $\underline{b}^{(2)T}_{neu} = [9 \;\; -6 \;\; 3]$, $\underline{n}^{(2)T} = [-2 \;\; -1 \;\; 4]$

c) Bestimmung der Komponenten von $\underline{c}^T = [3, 6, 45]$ in den KS (i) bis (iv):

• $\underline{c} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b}_{neu} + \lambda_3 \cdot \underline{n}$

(i)
$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 45 \end{bmatrix} ; \quad \text{Det} = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -126$$

$$\text{Det } 1 = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \\ 45 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -1260 \; ; \quad \text{Det } 2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 45 & -4 \end{vmatrix} = 126$$

$$\text{Det } 3 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & 45 \end{vmatrix} = 1008 \rightarrow \lambda_1 = \frac{-1260}{-126} = +10, \; \lambda_2 = \frac{126}{-126} = -1; \; \lambda_3 = \frac{1008}{-126} = -8$$

Also $\underline{c}^{*T} = [+10, -1, -8]$ 8

.0003/0501

(ii) $\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 45 \end{bmatrix}$, Det = +126

Det 1 = +1260, Det 2 = +126, Det 3 = −1008 $\rightarrow \lambda_1 = +10,\ \lambda_2 = +1,\ \lambda_3 = -8$

$\underline{c}^* = [10, 1, -8]$ (s. Musterlösung)

(iii) $\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 45 \end{bmatrix}$, Det = +126

Det 1 = +1260, Det 2 = −126, Det 3 = +1008 $\rightarrow \lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = +8$

$\underline{c}^* = [10, -1, 8]$

(iv) $\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 45 \end{bmatrix}$, Det = −126

Det 1 = −1260, Det 2 = −126, Det 3 = −1008 $\rightarrow \lambda_1 = +10,\ \lambda_2 = +1,\ \lambda_3 = +8$

$\underline{c}^* = [10, 1, 8]$

Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation max = 12 Punkte) (/ 12)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$6x_1^2 + 24x_1x_2 - x_2^2 - 3 = 0$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation Art und Lage des Kegelschnittes. Zeichnen Sie (Teil b) die Kurve im gegebenen Ausgangskoordinatensystem.
(Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.)

(/8)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 12 \\ 12 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$0 = (6-\lambda)(-1-\lambda) - 12^2 = \lambda^2 - 5\lambda - 150 \quad 1 \quad 1/2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-150)}}{2} = \frac{+5 \pm 25}{2} \quad \lambda_1 = 15, \quad \lambda_2 = -10$$

1/2

EV zu EW $\lambda_1 = +15$

1 $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -9x_{11} + 12x_{12} = 0 \\ 12x_{11} - 16x_{12} = 0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x_{11} = \frac{12}{9} x_{12} = \frac{4}{3} x_{12}$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

EV zu EW $\lambda_2 = -10$

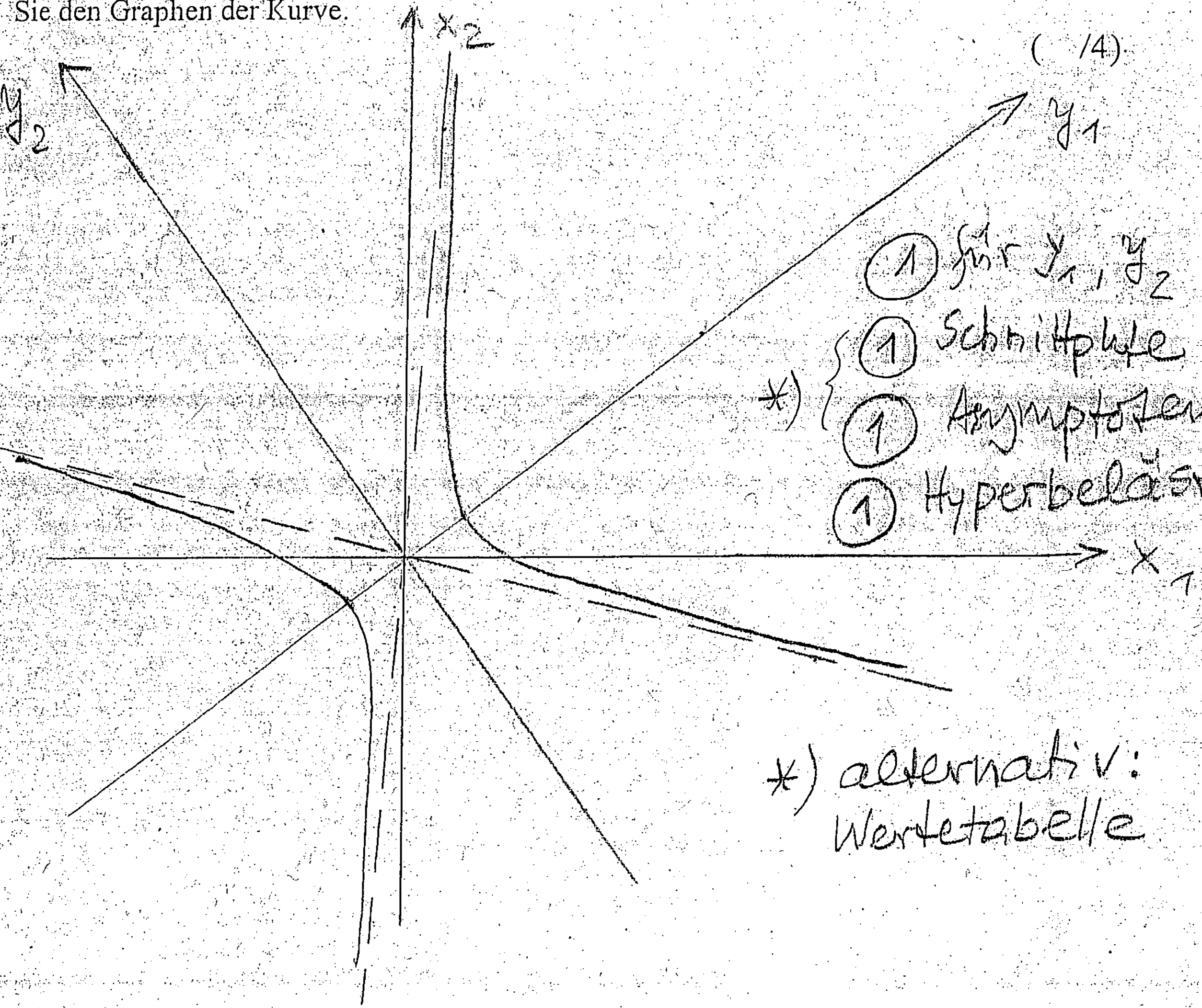
1 $\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 16x_{21} + 12x_{22} = 0 \\ 12x_{21} + 9x_{22} = 0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x_{21} = -\frac{9}{12} x_{22} = -\frac{3}{4} x_{22}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

b) Zeichnen Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/4)



(1) für y_1, y_2

*) { (1) Schnittpkte
(1) Asymptoten }

(1) Hyperbeläste

*) alternativ: Wertetabelle

$$P = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = +1 \checkmark \quad (1/2)$$

$$W = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 - 3 = 0 \quad (1/2)$$

$$15 y_1^2 - 10 y_2^2 = 3 \quad |:3$$

$$(1) \quad \left(\frac{y_1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{\sqrt{\frac{3}{10}}}\right)^2 = 1 = \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{b}\right)^2$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447 \quad (1/2) \qquad b = \sqrt{\frac{3}{10}} = 0{,}548 \quad (1/2);$$

Asymptoten

$$y_2 = \pm \frac{b}{a} y_1 = \pm 1{,}225\, y_1$$