

## Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten  
 Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra  
 Aufgabensteller: Gröger, Kloster, Plöchinger, Pöschl, Stiefenhofer

**!! WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!  
 Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!  
 (Ausnahme: Aufgabe 1, wo das richtige Ankreuzen genügt.)**

---

**Name:** **Geb. – Datum** **Punkte:** ( / 40)

**Vorname:** **Stud.- Gruppe** **Korr:**

---

**Raum/Platz-Nr:** **Aufsicht:** **Note:**

---

**Aufgabe 1: (Matrizenrechnung) Es ist jeweils eine oder mehr als eine Aussage richtig!  
 (Jedes richtige Kreuz ergibt einen Punkt, jedes falsche einen Punktabzug,  
 bei negativen Werten werden 0 Punkte eintragen)**

a) Welches der folgenden Produkte vom Matrizen ist **Null**:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$       $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$       $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$  ( /1)

b) Welche der folgenden Eigenschaften hat ein Matrizenprodukt **nicht**:

Assoziativität     Kommutativität     Distributivität ( /1)

c) Welche der folgenden Übergänge kann **nicht** durch **eine** elementare Umformung ( damit ist die Addition des Vielfachen einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte der Matrix gemeint) geschehen sein:

$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$       $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$       $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ( /1)

d) A, B und C seien n-reihige quadratische Matrizen. Kreuzen Sie jeweils **alle** richtigen Aussagen an:  
 B gehe aus A durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen der Matrix hervor.

$\det(B) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$       $\det(B) = \det(A)$       $\det(B^{-1}) = \det(A)$

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = 0$       $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n-1$       $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) \leq n-1$

$\det(A+C) = \det(A)+\det(C)$       $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$       $\det(A*B) = \det(B*A)$  ( /4)

**Aufgabe 2 : (Lineares Gleichungssystem)**

Ermitteln Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems:

( /5)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 13 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= -7 \end{aligned}$$

**Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter)**

Für welche Werte des reellen Parameters  $a$  besitzt das lineare Gleichungssystem

( /8)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 3 \\3x_1 + (4-a)x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

- a) keine Lösung ?
- b) unendlich viele Lösungen?
- c) genau eine Lösung?
- d) Man berechne die Lösungen in den Fällen b) und c)

**Aufgabe 4: (Matrizengleichung)**

Es gelte die Gleichung:  $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  ( /3)

Gesucht ist eine daraus folgende Beziehung zwischen x und y.

**Aufgabe 5: (Berechnung der inversen Matrix)**

Gesucht ist die inverse Matrix  $D^{-1}$  der gegebenen Matrix D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ( /6)$$

**Aufgabe 6: (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix)**

Gegeben ist die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  von A. ( /5)

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert  $\lambda_1$  und  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ . ( /6)