Fachhochschule München **Fachbereich 03 FA** **SS 2007**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Pöschl, Warendorf, Kloster

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!
(Ausnahme: Aufgabe 1, wo die richtige Angabe genügt.)

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte: (/ 40)**
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: (Matrizen- und Vektorrechnung, Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen, lineare Gleichungssysteme **(/4)**
(Jedes richtige Kreuz ergibt 1/2 Punkt, jedes falsche 1/2 Punkt Abzug, bei negativen Werten werden 0 Punkte eintragen)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Welche der nachstehenden Aussagen sind richtig (bitte ankreuzen):

☐ Die Determinante von A ist 1 ☐ Die Determinante von A ist 8
☐ Die Determinante von A ist 2 ☐ A hat den Eigenwert 1
☐ A hat den Eigenwert 2 ☐ A hat den Eigenwert 3
☐ Die Eigenvektoren von A sind linear abhängig
☐ Die Eigenvektoren von A sind linear unabhängig
☐ A^{-1} hat den Eigenwert ⅛
☐ A^{-1} hat den Eigenwert ½
☐ A ist invertierbar ☐ A ist singulär
☐ Spur(A) = 3 ☐ Spur(A) = 7 ☐ Spur(A) = 10

$A * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ hat ☐ genau eine Lösung ☐ keine Lösung ☐ unendlich viele Lösungen

Aufgabe 2 : (Lineare Abhängigkeit und Orthogonalität von Vektoren) **(/7)**

Gegeben sine die 3 Vektoren:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{bmatrix}$$

a) Für welchen Wert von c sind x, y und z linear abhängig ? (/2)

b) Berechnen Sie einen Vektor w, der orthogonal zu x und zu y ist. (/2)

c) Man setzte c = 0 und bilde eine Matrix A mit den 3 Vektoren als Spalten und löse das lineare Gleichungssystem (/3)

$$A*x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3: (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix) (/10)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von *A*. (/4)
Der Rechenweg muss erkennbar sein!

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zu den jeweiligen Eigenwerten. (/6)
in normierter Darstellung (Wenn Sie die Eigenwerte nicht ermitteln konnten, rechnen Sie mit $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ weiter):

Aufgabe 4 : (Matrizenrechnung, inverse Matrix) (/10)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\beta & 2\beta - 2 \\ 1 & 2 & \beta + 1 \\ 0 & 2 - \beta & \beta + 5 \end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von β ist A invertierbar ? (/ 4)

b) Berechnen Sie B^{-1} für $\beta = 0$. (/ 6)

Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation): (/9)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

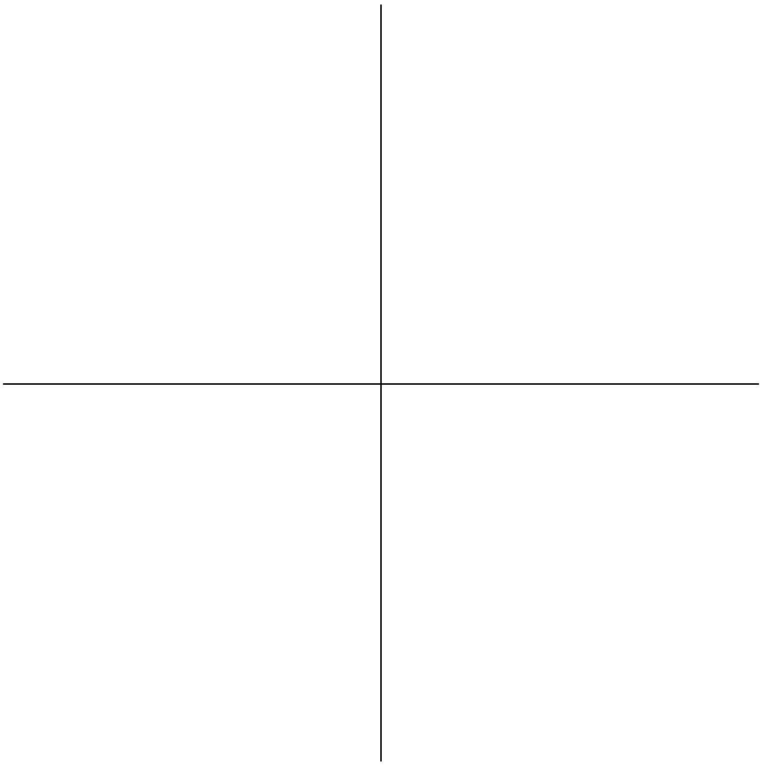
$$2x_1^2 - 2\sqrt{2}\, x_1 x_2 + 3x_2^2 - 9 = 0 .$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel). (Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.)
Wie groß ist der Drehwinkel?

(/6)

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/3)



Es folg ein Teil der Lösungen

```
> restart;# Lösung Aufgabe 4
> with (LinearAlgebra):
>
> A := Matrix([[2,2*beta,2*beta-2],[1,2,beta+1],[0,2-
beta,beta+5]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2\beta & 2\beta - 2 \\ 1 & 2 & \beta + 1 \\ 0 & 2 - \beta & \beta + 5 \end{bmatrix}$$

```
> R1 := LinearAlgebra:-Determinant(Matrix(%id = 18941564));
```

$$R1 := 12 - 2\beta^2 - 2\beta$$

```
> solve(R1=0,beta);
```

$$-3, 2$$

```
> R0 := LinearAlgebra:-MatrixInverse(Matrix(%id = 18941564));
```

$$R0 := \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta + 8 + \beta^2}{2(-6 + \beta^2 + \beta)} & \dfrac{2(\beta^2 + \beta + 1)}{-6 + \beta^2 + \beta} & -\dfrac{\beta^2 - \beta + 2}{-6 + \beta^2 + \beta} \\ \dfrac{\beta + 5}{2(-6 + \beta^2 + \beta)} & -\dfrac{\beta + 5}{-6 + \beta^2 + \beta} & \dfrac{2}{-6 + \beta^2 + \beta} \\ \dfrac{1}{2(\beta + 3)} & -\dfrac{1}{\beta + 3} & \dfrac{1}{\beta + 3} \end{bmatrix}$$

```
> subs(beta=0,R0);
```

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-5}{12} & \dfrac{5}{6} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{-1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Zu Aufgabe 3 :

```
> A := Matrix([[3,-2,0],[-2,1,2],[0,2,3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> R3 := LinearAlgebra:-Eigenvectors(Matrix(%id = 19647428));
```

$$R3 := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> R2 := LinearAlgebra:-Eigenvalues(Matrix(%id = 19647428));
```

$$R2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ZU Aufgabe 2:

```
> restart;with (LinearAlgebra):
> G := Matrix([[1,0,1],[2,-1,2],[3,2,c]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{bmatrix}$$

```
> R0 := LinearAlgebra:-Determinant(Matrix(%id = 18546852));
```

$$R0 := -c + 3$$

```
>
> v := Vector(3,[4,2,3]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> L:=GenerateEquations( G,[x1,x2,x3],<v[1],v[2],v[3]>);
```

$$L := [x1 + x3 = 4, 2\,x1 - x2 + 2\,x3 = 2, 3\,x1 + 2\,x2 + c\,x3 = 3]$$

```
> eqns := {L[1],L[2],L[3]};
```

$$eqns := \{2\,x1 - x2 + 2\,x3 = 2, 3\,x1 + 2\,x2 + c\,x3 = 3, x1 + x3 = 4\}$$

```
> sols := solve( eqns ,{x1,x2,x3});
```

$$sols := \left\{ x2 = 6, x3 = -\frac{21}{-3+c}, x1 = \frac{9+4c}{-3+c} \right\}$$

```
> subs(c=0,%);
```

$$\{x2 = 6, x3 = 7, x1 = -3\}$$

```
> v := Vector(3,[1,2,3]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> w := Vector(3,[0,-1,2]);
```

$$w := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> CrossProduct(v,w);   # Kreuzprodukt = Vektorprodukt
```

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
>
```