Hochschule München **Fakultät 03 FA** **SS 2008**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner ohne Matrizenalgebra
Aufgabensteller: Pöschl, Kloster

!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name:	**Geb. – Datum**	**Punkte: (/ 60)**
Vorname:	**Stud.- Gruppe**	**Korr:**
Raum/Platz-Nr:	**Aufsicht:**	**Note:**

Aufgabe 1: Gleichungssystem mit Parameter (/ 12)

Für welche Werte des reellen Parameters α besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & \alpha x2 & & & & & = & 3 \\ x_1 & + & & & 2\alpha x_3 & + & x_4 & = & 5\alpha \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 1-2\alpha \\ -2x_1 & + & & & 4x_3 & + & \alpha x_4 & = & 2+\alpha \end{array}$$

a) unendlich viele Lösungen ?
b) keine Lösung ?
c) genau eine Lösung ?
d) Man berechne die Lösung für den Fall a) und für den Fall c) mit $\alpha = -1$

Freie Seite für Berechnungen zur Aufgabe 1

Aufgabe 2 : (Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalähnlichkeit)) (/14)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix. (/6)

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix. (/4)

(c) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix (/4)

Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem) (/ 6)

Berechnen Sie die Lösung(en) des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &= 1 \\
-2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: (Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit) (/10)

Gegeben sind die 3 Vektoren

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die möglichen Werte des Parameters x so, dass die 3 Vektoren linear abhängig sind (Hinweis: 2 Lösungen). (/5)

b) Ersetzen Sie nun x in den gegebenen Vektoren durch den ersten in a) gefundenen Wert. Wie lässt sich der Vektor b durch die Vektoren a und c mittels $b = \lambda a + \mu c$ darstellen? (/3)

Berechnen Sie die Parameter λ und μ !

c) Ersetzen Sie nun x in den gegebenen Vektoren durch den zweiten in a) gefundenen Wert. Wie lässt sich der Vektor b durch die Vektoren a und c mittels $b = \lambda a + \mu c$ darstellen? (/2)

Berechnen Sie die Parameter λ und μ !

Aufgabe 5: (Determinantenberechnung) (/ 6)

Gegeben sei die Matrix $B = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ a & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix als Funktion von a.
Für welches a hat B den Rang 2, für welche a den Rang 3?

Aufgabe 6: (Hauptachsentransformation max = 12 Punkte)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$2x^2 + 23y^2 + 72xy - 450 = 0$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation die Kurvengleichung in Normalform (Standardlage) sowie den Typ (Ellipse, Hyperbel oder Parabel).

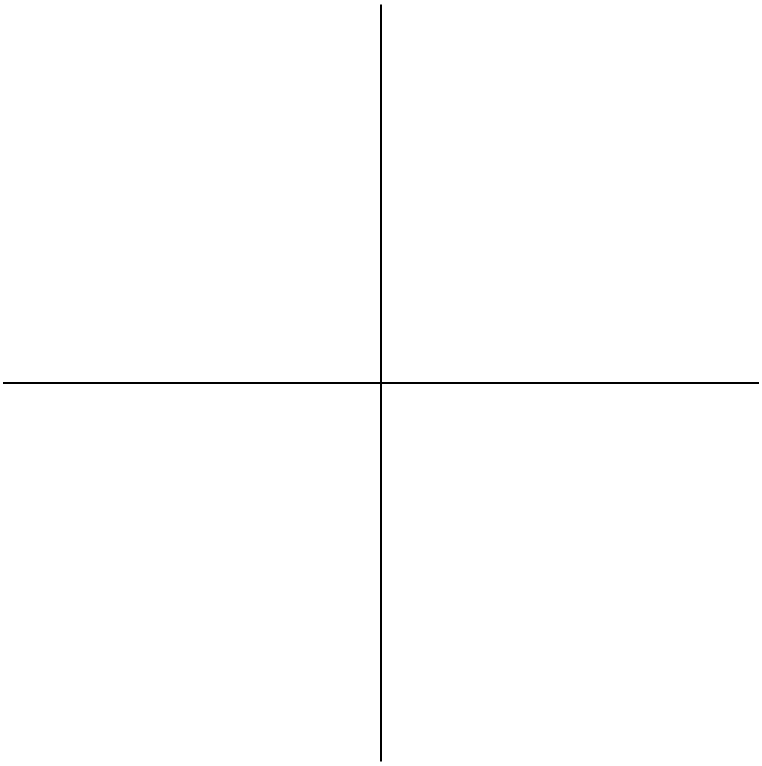
(Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht **nicht** verschoben.)

Geben Sie den Drehwinkel α und die Gleichung der Transformation vom x_1x_2 System ins gedrehte y_1y_2 System an! (/8)

Freie Seite für Berechnungen zur Aufgabe 6

b) Skizzieren Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve.

(/4)



Lösungen der Aufgaben 1-4:

Aufgabe 1 : (Lineares Gleichungssystem mit Parameter)

```
> restart;with (LinearAlgebra):
> G := Matrix([[1,a,0,0],[1,0,2*a,1],[0,0,2,1],[-2,0,4,a]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & a \end{bmatrix}$$

```
> R0 := LinearAlgebra:-Determinant(Matrix(%id = 21274160));
```

$$R0 := 2a^2$$

```
>
> v := Vector(4,[3,5*a,1-2*a,2+a]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 3 \\ 5a \\ 1-2a \\ 2+a \end{bmatrix}$$

```
> L:=GenerateEquations(
G,[x1,x2,x3,x4],<v[1],v[2],v[3],v[4]>);
```

$L := [x1 + a\,x2 = 3, x1 + 2\,a\,x3 + x4 = 5\,a, 2\,x3 + x4 = 1 - 2\,a, -2\,x1 + 4\,x3 + a\,x4 = 2 + a]$

```
> eqns := {L[1],L[2],L[3],L[4]};;
```

$eqns := \{x1 + a\,x2 = 3, x1 + 2\,a\,x3 + x4 = 5\,a, 2\,x3 + x4 = 1 - 2\,a, -2\,x1 + 4\,x3 + a\,x4 = 2 + a\}$

```
> sols := solve( eqns ,{x1,x2,x3,x4});
```

$$sols := \left\{ x3 = a + 7, x2 = \frac{2\,a^2 + 5\,a - 10}{a}, x1 = -2\,a^2 - 5\,a + 13, x4 = -4\,a - 13 \right\}$$

```
> subs (a=-1,%);
```

$$\{x2 = 13, x1 = 16, x3 = 6, x4 = -9\}$$

Aufgabe 2: Inverse Matrix, Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalännlichkeit.

Man berechne zu der Matrix

$$A = \begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

a) Die inverse Matrix

b) Die Eigenwerte

c) Die Eigenvektoren. Wieviele Eigenvektoren gibt es?

```
>
>
> A := Matrix([[1,3,0],[1,2,3],[0,-1,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> R16 := LinearAlgebra:-Eigenvectors(Matrix(%id = 24679856));
```

$$R16 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> R15 := LinearAlgebra:-Eigenvalues(Matrix(%id = 24679856));
```

$$R15 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Dimension des Eigenraumes ist nur 2, also kleiner 3, deshalb is die Matrix nicht diagonalähnlich.

Aufgabe 3 : (Lineares Gleichungssystem)

Berechnen Sie die Lösung(en) des linearen Gleichungssystems:

-x1	+	x2	+		=	1
-2x1	+	2x2	+	x3	=	5
2x1	-	3x2	+	2x3	=	2

```
> restart;with (LinearAlgebra):
> G := Matrix([[-1,1,0],[-2,2,1],[2,-3,2]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> R10 := LinearAlgebra:-Determinant(Matrix(%id = 23479256));
```

$$R10 := -1$$

```
>
> v := Vector(3,[1,5,2]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> L:=GenerateEquations( G,[x1,x2,x3],<v[1],v[2],v[3]>);
```

$$L := [-x1 + x2 = 1, -2\,x1 + 2\,x2 + x3 = 5, 2\,x1 - 3\,x2 + 2\,x3 = 2]$$

```
> eqns := {L[1],L[2],L[3]};
```

$$eqns := \{-2\,x1 + 2\,x2 + x3 = 5, -x1 + x2 = 1, 2\,x1 - 3\,x2 + 2\,x3 = 2\}$$

```
> sols := solve( eqns ,{x1,x2,x3});
```

$$sols := \{x3 = 3, x1 = 1, x2 = 2\}$$

```
>
```

Aufgabe 4: Lineare Unabhängigkeit.

Gegeben sind die 3 Vektoren

	1		x		1
a =	2	b =	1	c =	1

4 2 x

a) Bestimmen Sie die beiden Lösungen für den Parameter x so, dass die 3 Vektoren linar abhhängig sind .

b) Wie lässt sich – nachdem man x jeweils durch die in a) bestimmten Werte ersetzt hat – der Vektor c durch die Vektoren a und b mittels

b = ?a + ?c darstellen?

Berechnen Sie die Parameter ? und ? für die beiden Werte des Parameters x !

```
> restart;with (LinearAlgebra):
> G := Matrix([[1,x,1],[2,1,1],[4,2,x]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & x \end{bmatrix}$$

```
> R0 := LinearAlgebra:-Determinant(Matrix(%id = 19843476));
```

$$R0 := 5\,x - 2 - 2\,x^2$$

```
> solve(R0=0,x);
```

$$\frac{1}{2}, 2$$

Für x1 = 2 und x2 = 0.5 sind die Vekrtoren linear abhängig.

```
> G := Matrix([[1,1],[2,1],[4,2]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> d := Vector(3,[2,1,2]);
```

$$d := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> L:=GenerateEquations( G,[v,w],<d[1],d[2],d[3]>);
```

$$L := [v + w = 2, 2\,v + w = 1, 4\,v + 2\,w = 2]$$

```
> eqns := {L[1],L[2],L[3]};
```

$$eqns := \{4\,v+2\,w=2,\ v+w=2,\ 2\,v+w=1\}$$

```
> sols := solve( eqns ,{v,w});
```

$$sols := \{v=-1,\ w=3\}$$

Also b = -a + 3*c

```
>
```

Für x1 = 2 und x2 = 0.5 sind die Vekrtoren linear abhängig.

```
> G := Matrix([[1,1],[2,1],[4,0.5]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

```
> d := Vector(3,[0.5,1,2]);
```

$$d := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> L:=GenerateEquations( G,[v,w],<d[1],d[2],d[3]>);
```

$$L := [v+w=0.5,\ 2\,v+w=1,\ 4\,v+0.5\,w=2]$$

```
> eqns := {L[1],L[2],L[3]};
```

$$eqns := \{v+w=0.5,\ 4\,v+0.5\,w=2,\ 2\,v+w=1\}$$

```
> sols := solve( eqns ,{v,w});
```

$$sols := \{w=0.,\ v=0.5000000000\}$$

Also b = 1/2*a .

Aufgabe 5: (Determinantenberechnung)

Gegeben sei die Matrix .

```
> A := Matrix([[a,1,2],[-1,2,4],[a,-3,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ a & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> R2 := LinearAlgebra:-MatrixInverse(Matrix(%id = 571412));
```

$$R2 := \begin{bmatrix} \frac{2}{2a+1} & -\frac{1}{2a+1} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ -\frac{-3+2a}{8(2a+1)} & \frac{a}{2(2a+1)} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

```
> R2 := LinearAlgebra:-Determinant(Matrix(%id = 19060248));
```

$$R2 := 16a + 8$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix als Funktion von a.
Für welches a hat A den Rang 2 , für welche a den Rang 3 ?
Für a = -1/2 ist Det(A = 0 und damit Rang(a) <=2. Wegen der Unterdeterminante der Teilmatrix

2 4
-3 2 , weche den Wert 16 hat, ist der Rang >= 2, also insgesamt = 2.

Für a <> -1/2 ist der Rang der Matrix 3, da die Determinante nicht verschwindet.