**Fachhochschule München** **Fakultät 03 FA** **WS 2011/2012**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Mahnke, Pöschl , Schwarz-Hemmert, Warendorf
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
**Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!**

**Name:** **Geb. – Datum** **Punkte: ca( / 50)**

**Vorname:** **Stud.- Gruppe** **Korr:**

Raum/Platz-Nr: Aufsicht: Note:

# Deckblatt

## Aufgabe 1: (Berechnung Determinante und inverse Matrix ) ca ( / 10)

Gegeben ist die folgende Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A. **ca ( / 4)**

# Fortsetzung Aufgabe 1

b) Berechnen Sie die Inverse von $B$: $B^{-1}$. **ca ( / 6 )**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 2: Lineares Gleichungssystem mit Parameter** **ca** ( / 9)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + ax_3 &= 4 \end{aligned}$$

Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen ?
c) genau eine Lösung ?
d) Man berechne die Lösungen für den Fall c).

## Rechenseite für Aufgabe 2

**Aufgabe 3:**
**(Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix, inverse Matrix, Diagonalmatrix, Ähnlichkeitstransformation)** ( /10)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$ und $\lambda_3$ von $A$. ( /2)

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zu den jeweiligen Eigenwerten und geben Sie drei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ von $A$ in normierter Darstellung an. (Wenn Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren nicht ermitteln konnten, bearbeiten Sie die nachfolgenden Teilaufgaben ohne Einsetzen von konkreten Werten) ( /3)

**Fortsetzung Aufgabe 3:**

c) Genau eine der folgenden drei Vektorsummen ist ein Eigenvektor von *A* zum Eigenwert 1. Markieren Sie die Vektorsumme mit dieser Eigenschaft:

- $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
- $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
- $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Bestätigen Sie Ihre Behauptung durch Ausführung einer geeigneten Multiplikation mit *A* ( / 2)

d) Geben Sie folgende Werte oder Matrizen an oder begründen Sie, warum diese nicht existieren: (Hinweis: dies ist ohne weitere große Berechnungen möglich) ( /3)

- Die Determinante von A

- Die Determinante der inversen Matrix $A^{-1}$

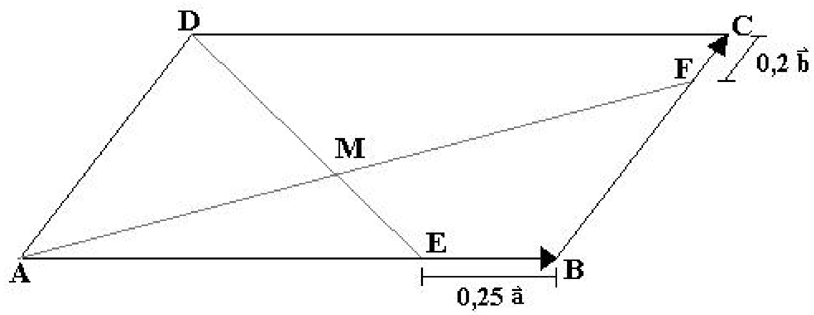
- Eine zur Matrix A ähnliche Diagonalmatrix D und eine zugehörige Transformationsmatrix P die $P^{-1}AP = D$ erfüllt (Produkt muss nicht nachgeprüft werden).

**Aufgabe 4:**
**Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit von Vektoren** **ca** ( / 8)

Gegeben ist das folgende Parallelogramm, welches von den Vektoren

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ aufgespannt wird.

Die Strecke $\overline{FC}$ hat die Länge $\overline{FC} = 0{,}2 \cdot \left|\vec{b}\right|$, $\overline{EB}$ die Länge $\overline{EB} = 0{,}25 \cdot \left|\vec{a}\right|$




a) Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{DE}$ durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

**ca** ( / 2)

**Fortsetzung Aufgabe 4**

b) Seien nun $\mu \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AM}$ und $\sigma \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ME}$, mit $0<\mu<1$ und $0<\sigma<1$.

Lösen Sie durch Überlegen (ohne Rechnung): **ca** ( / 2)

Welchen Vektor ergibt $\mu \cdot \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} + \sigma \cdot \overrightarrow{DE}$ ?

Markieren Sie diese Beziehung in der Grafik.

c) Nutzen Sie die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus, **ca** ( / 2)

um mit den Ergebnissen von a) und b) $\mu$ und $\sigma$ zu berechnen.

**Fortsetzung Aufgabe 4**

d) In welchem Verhältnis $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MF}$ teilt $\overrightarrow{DE}$ die Strecke $\overline{AF}$ ? **ca** ( / 2)

**Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation)** **ca ( / 13)**

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$$\frac{32}{25}x_1^2 + \frac{18}{25}\,x_2^2 + \frac{48}{25}x_1\,x_2 - \frac{9}{5}x_1 + \frac{12}{5}x_2 \;= 0$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation Art und Lage des Kegelschnittes. Zeichnen Sie (Teil b) die Kurve im gegebenen Ausgangskoordinatensystem.
Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht, nicht verschoben.

( / 9 )

## Rechenseite für Aufgabe 5:

## Fortsetzung Aufgabe 5:

b) Zeichnen Sie die Lage des transformierten Achsensystems im $x_1,x_2$ System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve (Maßstab 1 LE = 1 cm). ( / 4 )