DIPLOMVORPRÜFUNG IN MATHEMATIK I - FA - MB - LR

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Sktripte, Bücher, KEIN Taschenrechner
Aufgabensteller:	Mahnke, Schlüchtermann

WICHTIG: Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / max. 60
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Reihen / Potenzreihen (/max. 11 Punkte)**

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung der folgenden Funktion

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$$

an der Stelle $x = 3$.

$$f(3) = \ln(5) = a_0$$

(/ 11)

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow f'(3) = \frac{6}{5} \Rightarrow a_1 = \frac{6}{5}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-4)\cdot 2 - 2x(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-8-2x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$\Rightarrow f''(3) = \frac{-26}{25} \Rightarrow a_2 = \frac{-13}{25}$$

$$f'''(x) = \frac{(x^2-4)^2(-4x) - (-8-2x^2)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{((x^2-4)^2)^2} = \frac{4x(\overset{-x^2+4+8+2x^2}{\cancel{4-x^2+8+2x}})}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{4x(\overset{x^2+12}{\cancel{12+2x-x^2}})}{(x^2-4)^3} \Rightarrow f'''(3) = \frac{\overset{12\cdot 21}{\cancel{12(12+6-9)}}}{5^3} = \cancel{\frac{108}{125}} \Rightarrow a_3 = \frac{\overset{42}{\cancel{52}}}{\underset{125}{\cancel{375}}}$$

$$\Rightarrow T_{f;3}(x) = \ln(5) + \frac{6}{5}(x-3) - \frac{13}{25}(x-3)^2 + \frac{\overset{42}{\cancel{52}}}{\underset{125}{\cancel{375}}}(x-3)^3 + \ldots$$

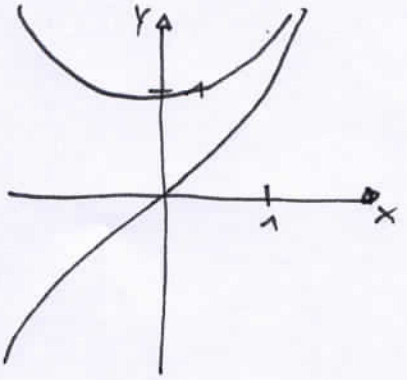
2. **Aufgabe: Funktionen einer Veränderlichen** (/max. 9 **Punkte**)

Gegeben ist die folgende Funktion

$$f(x) = \operatorname{artanh}(x)$$

(a) Wie lautet der maximale Definitionsbereich von f?

(/3)



$$\tanh : \mathbb{R} \to]-1;1[$$

$$\Rightarrow \operatorname{artanh} :]-1;1[\to \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{D}_{f\,max} =]-1;1[}}$$

(b) Besitzt f auf ihrem maximalen Definitionsbereich Punkte mit der Eigenschaft $f''(x) = 0$? (Bestimmen Sie die notwendigen Ableitungen schrittweise ohne Formelsammlung durch Ableiten der Umkehrfunktion)

(/6)

$$f^{-1}(x) = \operatorname{artanh} \Rightarrow f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{(\cosh(x))^2}$$

$$= 1 - (\tanh(x))^2$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(x))'' = -\frac{-2x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow (f^{-1}(x))'' = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$$

3. **Aufgabe: Integration** (/max. 15 Punkte)

(a) Gegeben sei die folgende Integralfunktion:

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt$$

Berechnen Sie $F'(x)$.

(/ 3)

$$F(x) = \tilde{F}(\sqrt{x}) \quad , \text{mit} \quad \tilde{F}(x) = \int_a^x e^{-t^2} dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{d\sqrt{x}} \tilde{F}(\sqrt{x}) \cdot \frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$= e^{-t^2}\Big|_{t=\sqrt{x}} \cdot \frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$= \underline{\underline{e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

(b) Sie mit den unten angegebenen Schritten den Wert des folgenden Integrals:

$$\int_1^3 \frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1}\, dx$$

i. Bestimmen Sie eine Partialbruchzerlegung des Integranden.

ii. Stellen Sie die nach der Partialbruchzerlegung auftretenden Teilintegrale einzeln auf.

iii. Lösen Sie die Teilintegrale separat und bestimmen Sie aus den Ergebissen den Wert des Integrals.

(/ 12)

NST des Nenners: $x_0 = -1$

$$\Rightarrow \quad (x^3 + x^2 + x + 1) : (x+1) = x^2 + 1$$
$$\begin{array}{l} -(x^3 + x^2) \\ \hline \quad\quad x + 1 \\ \quad -(x+1) \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

zu i. :
$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 4 = A(x^2+1) + (Bx+C)\cdot(x+1)$$

$x = -1$: $2 = 2A \Rightarrow A = 1$

$x = 0$: $4 = A + C \Rightarrow C = 3$

$x = 1$: $8 = 2A + 2B + 2C \Rightarrow 8 = 2 + 2B + 6 \Rightarrow B = 0$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+x+1}\, dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$$

Rechenseite zu Aufgabe 4:

zu ii:

$$I_1 := \int_1^3 \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$I_2 := \int_1^3 \frac{3}{x^2+1}\, dx$$

zu iii:

$$I_1 = \int_1^3 \frac{1}{x+1}\, dx = \left[\ln(|x+1|) \right]_1^3 = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2)$$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{3}{x^2+1}\, dx = 3 \cdot \left[\arctan(x) \right]_1^3$$

$$= 3\left(\arctan(3) - \arctan(1) \right)$$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+x+1}\, dx = \ln(2) + 3\left(\arctan(3) - \arctan(1) \right)$$

4. **Aufgabe:Komplexe Zahlen** (/max. 12 Punkte)

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}j\ ,\ z_2 = 2 + 2j \quad (j^2 = -1)$$

(a) Ermitteln Sie die eulersche Darstellung und das Produkt $z_1 \cdot z_2$ der beiden Zahlen.

$|z_1| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$ (/6)

$|z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad \varphi_2 = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

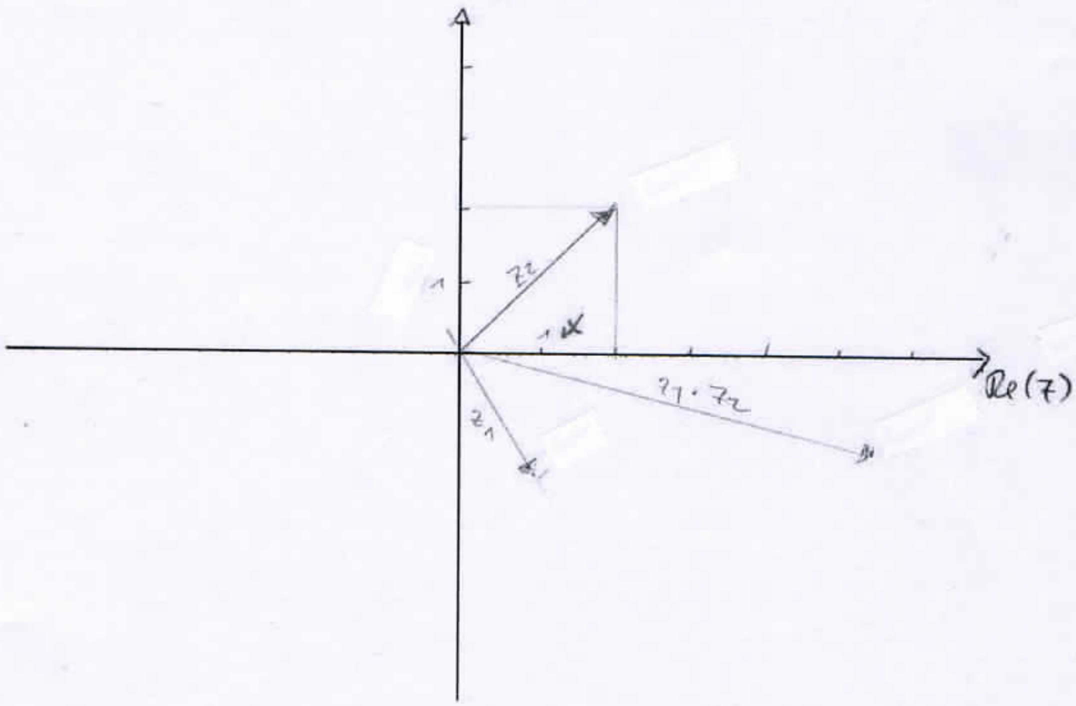
$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \left(2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}\right) \cdot \left(2\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right) = \underline{\underline{4\sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{12}}}}$

$4 \cdot 1{,}41 = 5{,}64$

$2 \cdot 1{,}41 = 2{,}82$

(b) Zeichnen Sie z_1, z_2 und $z_1 \cdot z_2$ in die Gaußsche Zahlenebene ein. (Skalierung: Xcm pro Einheit). $\underline{\underline{\sqrt{2} \approx 1{,}41}}$

(/6)



5. **Aufgabe: Eigenwerte und Eigenvektoren** (/max. 13 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

(/4)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda) + (1-\lambda)\left((2-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(-1 + 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 1\right)$$

$$= (1-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_0 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$$

(b) Berechen Sie die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$, so wie die zugehörenden normierten Vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ und $\vec{u}_3$.

(/6)

$\underline{\underline{\lambda_0 = 0}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_2 \end{matrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -x_3 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 3}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot (2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

(c) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle \vec{x}_1 \,;\, \vec{x}_2 \rangle$, $\langle \vec{x}_1 \,;\, \vec{x}_3 \rangle$ und $\langle \vec{x}_3 \,;\, \vec{x}_2 \rangle$. Welche Schlussfolgerung ziehen Sie aus den Ergebnissen der Skalarprodukte?

$$\langle \vec{x}_1 ; \vec{x}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

(/2)

$$\langle \vec{x}_2 ; \vec{x}_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{x}_3 ; \vec{x}_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

Die drei Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ sind paarw. orthogonal und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(d) Begründen Sie Ihre Ergebnisse und Ihre Schlussfolgerung aus c).

Die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ müssen orth. & l.u. sein, da A symmetrisch ist.

(/1)