Prüfung in BACHELOR: Ingenieurmathematik II
Maschinenbau, Fahrzeugtechnik, Luft- und Raumfahrttechnik -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher
Aufgabensteller:	Hinz,Kellersch,Pöschl,Radtke,Vielemeyer,Warendorf

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen**!
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muß erkennbar sein!

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / ca. 43
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Ebene Kurven** **(/ ca. 8 Punkte)**

Gegeben ist die ebene Kurve

$$\mathcal{C} : x(t) = 3t - 3t^2, \quad y(t) = 5t^3 - 5t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

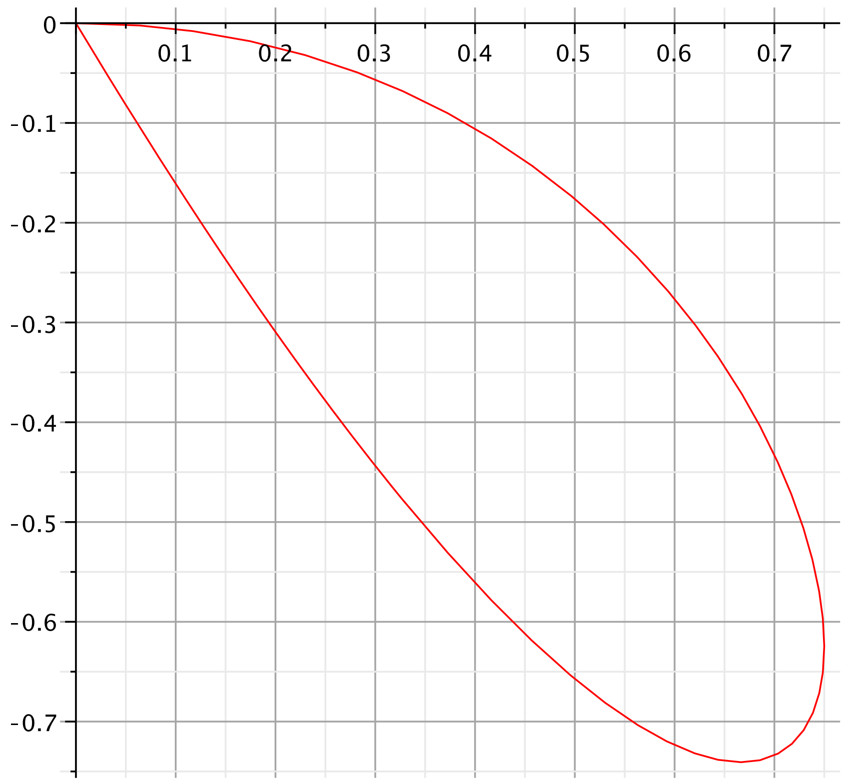

Abbildung 1: Kurve für $0 \leq t \leq 1$

(a) Ermitteln Sie die Kurvenpunkte (d.h. t, x(t) und y(t)), wo eine senkrechte bzw.waagerechte Tangente vorliegt. Zeichnen Sie die Tangenten in das Koordinatenkreuz ein.

(/ca. 5)

(b) Welchen Flächeninhalt umschließt die Kurve für $0 \leq t \leq 1$?

(/ca. 3)

2. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** **(/ ca. 10 Punkte)**

Gegeben ist die folgende auf ganz $I\!R^2$ definierte Funktion:

$$z = f(x, y) = x \cdot (y - 1) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

(a) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

(/ca. 5)

(b) Bestimmen Sie x, y-Koordinaten aller möglichen Extrema der Funktion f.
Prüfen Sie hier NICHT nach, ob es sich um einen Extremwert handelt

(/ca. 3)

(c) Bestimmen Sie die Art und die z-Koordinate der möglichen Extremstelle (x_E, y_E), die direkt auf der y-Achse liegt

(/ca. 2)

3. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

(/ ca. 8 Punkte)

Ein mit zu schwach angezogener Handbremse und der Gangschaltung im Leerlauf auf ganz leicht abschüssiger Straße geparktes Auto gerät durch die Erschütterungen eines vorbeifahrenden Lastwagens von der zum Parken ausreichenden Haftreibung in die geringere Rollreibung und setzt sich mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ in Bewegung. Die zugehörige Differentialgleichung lautet allgemein $m\ddot{x} + k\dot{x} = mg \cdot \sin\alpha$ wenn α der Neigungswinkel der Straße ist.
Im speziellen Fall möge sie

$$\ddot{x} + 0{,}01 \cdot \dot{x} = 0{,}01$$

im Meter-kg-Sekunde-System lauten.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 2)

(b) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung.

(/ca. 2,5)

(c) Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

(/ca. 2,5)

(d) Wieviel Meter hat das Auto nach $t = 100$ Sekunden zurückgelegt? (Hinweis: $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$)

(/ca. 1)

4. **System von linearen Differentialgleichungen**

(/ ca. 7 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 9y_1 - 5y_2. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung das Systems.

(/ca. 5)

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung unter den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 3$ und $y_2(0) = 5$.

(/ca. 2)

5. **Aufgabe: Vektorfelder** **(/ ca. 6 Punkte)**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{D} = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\pi x}\cos(\pi y) \\ -e^{\pi x}\sin(\pi y) \end{pmatrix}$$

Weiter seien zwei Wege $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{D}$ parametrisiert durch

$$\vec{r_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \; \vec{r_2}(t) = \begin{pmatrix} t(1-t) \\ t \end{pmatrix}, \; t \in [0,1],$$

die die Punkte $A = (0,0)$ und $B = (0,1)$ verbinden, gegeben.
Hinweis: Der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ ist offen und einfach zusammenhängend.

(a) Prüfen Sie ob das Vekorfeld ein Potential hat.

(/ca. 1,5)

(b) Bestimmen Sie ein Potential.

(/ca. 2,5)

(c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale.

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{v} d\vec{r_1} \text{ und } \int_{\mathcal{C}_2} \vec{v} d\vec{r_2}$$

(/ca. 2)

6. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** **(/ ca. 4 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y \cdot y' = 2 - x, \quad 0 < x < 2$$

(a) Lösen die Differentialgleichung allgemein.

(/ca. 2)

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu $x_0 = 1$, $y_0 = y(x_0) = 1$

(/ca. 2)