1. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 8 Punkte)

Gegeben ist die ebene Kurve

$$C: x(t) = 3t - 3t^2, \quad y(t) = 5t^3 - 5t^2, \quad 0 \le t \le 1$$

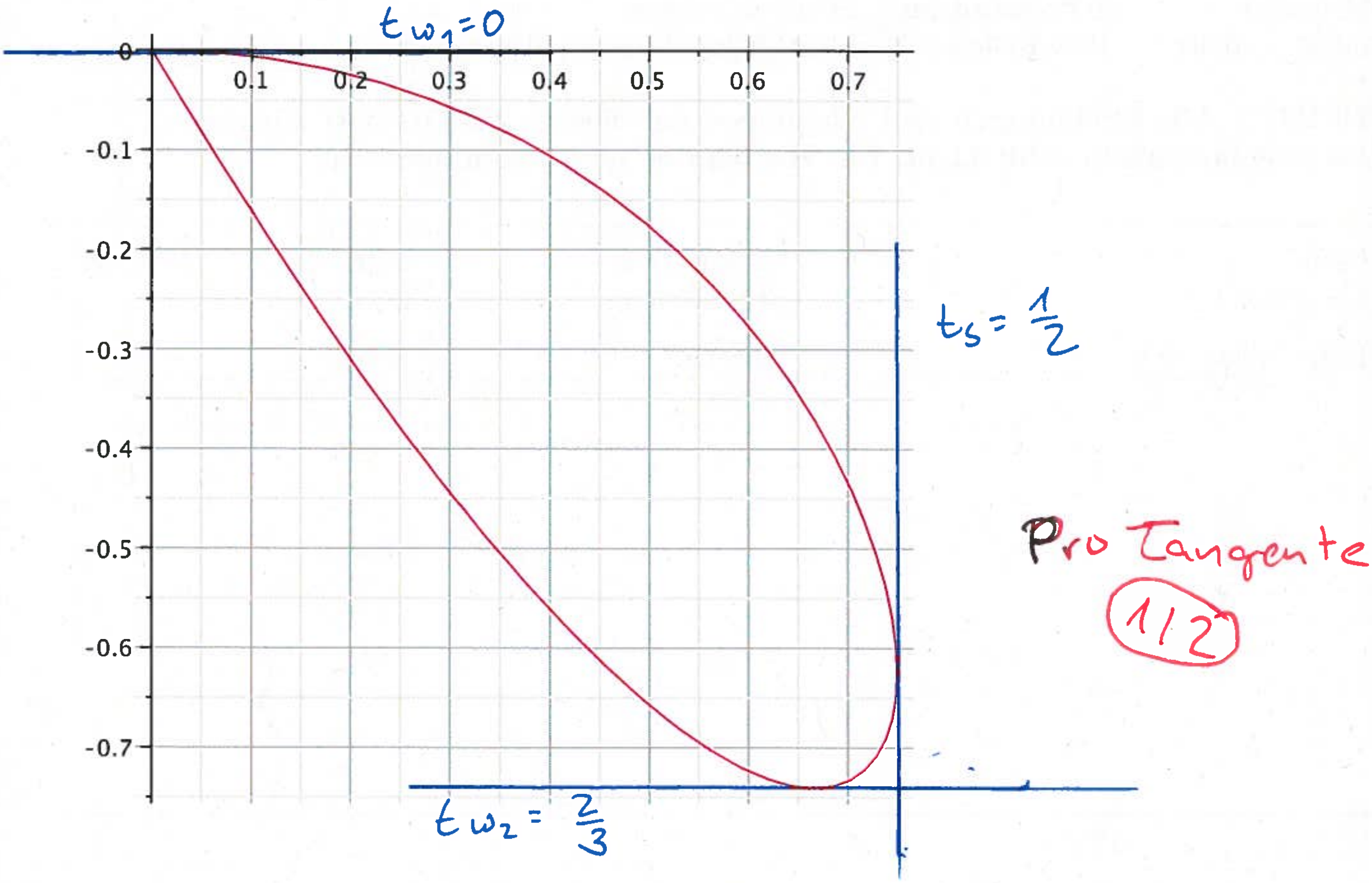

Abbildung 1: Kurve für $0 \le t \le 1$

(a) Ermitteln Sie die Kurvenpunkte (d.h. t, x(t) und y(t)), wo eine senkrechte bzw. waagerechte Tangente vorliegt. Zeichnen Sie die Tangenten in das Koordinatenkreuz ein.

(/ca. 5)

$\dot{x} = 3 - 6t, \quad \dot{y} = 15t^2 - 10t$ 1/2

senkrecht: $\dot{x} = 0, \dot{y} \neq 0$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow 3 - 6t_s = 0 \Rightarrow t_s = \frac{1}{2} \Rightarrow \dot{y}(t_s) \neq 0$

$x(t_s) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = +\frac{3}{4}$

$y(t_s) = \frac{5}{8} - \frac{5}{4} = -\frac{5}{8}$ 1

Waagerecht: $\dot{y} = 0,\ \dot{x} \neq 0$

$\dot{y} = 0: \quad 5t_w(3t_w - 2) = 0 \Rightarrow t_{w_1} = 0,\ t_{w_2} = \frac{2}{3}$

$t_{w_1} = 0: \quad \dot{x}(t_{w_1}) \neq 0$

$x(t_{w_1}) = 0,\ y(t_{w_1}) = 0$ 1

$t_{w_2} = \frac{2}{3}: \quad \dot{x}(t_{w_2}) \neq 0$

$x(t_{w_2}) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$y(t_{w_2}) = \frac{40}{27} - \frac{20}{9} = -\frac{20}{27}$ 1

(b) Welchen Flächeninhalt umschließt die Kurve für $0 \leq t \leq 1$?

(/ca. 3)

$A = \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \dot{y} \cdot x - \dot{x} \cdot y \, dt \right|$

1/2 $= \frac{1}{2} \left| \int_0^1 5 \cdot (3t^2 - 2t) 3 \cdot (t - t^2) - 3(1 - 2t) \cdot 5 \cdot (t^3 - t^2) \, dt \right|$

1 $= \frac{15}{2} \cdot \left| \int_0^1 3t^3 - 2t^2 - 3t^4 + 2t^3 - t^3 + 2t^4 + t^2 - 2t^3 \, dt \right|$

1/2 $= \frac{15}{2} \left| \int_0^1 -t^4 + 2t^3 - t^2 \, dt \right|$

1/2 $= \frac{15}{2} \left| \left[-\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 \right|$

$= \frac{15}{2} \left| -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right| = \frac{15}{2} \left| \frac{-6 + 15 - 10}{30} \right|$

1/2 $= \frac{15}{2} \left| -\frac{1}{30} \right| = \frac{1}{4}$

3

Kann auch mit der kürzeren Formel gerechnet werden

40

2. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. 12 Punkte)

Gegeben ist die folgende auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion:

$$z = f(x,y) = x \cdot (y-1) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

(a) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen. 5 (/ca. 6)

$$f_x = (y-1) \cdot e^{-x^2-y^2} + x \cdot (y-1) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-y^2}$$
$$= (y-1) \cdot e^{-x^2-y^2} (1-2x^2)$$

$$f_y = x \cdot e^{-x^2-y^2} + x(y-1) \cdot (-2y) \cdot e^{-x^2-y^2}$$
$$= x \cdot e^{-x^2-y^2} (1-2y^2+2y)$$

$$f_{xx} = (y-1) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-y^2} (1-2x^2) + (y-1) \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (-4x)$$
$$= (y-1) \cdot e^{-x^2-y^2} (-2x + 4x^3 - 4x) = (y-1) \cdot e^{-x^2-y^2} (-6x + 4x^3)$$

$$f_{yy} = x \cdot (-2y) \cdot e^{-x^2-y^2} (1-2y^2+2y)$$
$$+ x \cdot e^{-x^2-y^2} (-4y+2)$$
$$= x \cdot e^{-x^2-y^2} (-2y + 4y^3 - 4y^2 - 4y + 2)$$
$$= x \cdot e^{-x^2-y^2} (4y^3 - 4y^2 - 6y + 2)$$

$$f_{xy} = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} (1-2x^2) - 2y \cdot (y-1) \cdot e^{-x^2-y^2} (1-2x^2)$$
$$= (1-2x^2) e^{-x^2-y^2} (1 - 2y^2 + 2y)$$

jeweils 1

(b) Bestimmen Sie x, y-Koordinaten aller möglichen Extrema der Funktion f.
Prüfen Sie hier NICHT nach, ob es sich um einen Extremwert handelt (/ca. 3)

$f_x = 0 \Rightarrow y_{01} = 1$ 1/2 ✓ $\quad x_{02,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ 1/2

y_{01} in f_y : $\Rightarrow x_{01} = 0$ 1/2

$x_{02,3}$ in $f_y \Rightarrow 1 - 2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y_{02,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ 1/2

$\Rightarrow E_1(0|1)$ $\quad E_2\left(+\sqrt{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad E_4\left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$E_3\left(+\sqrt{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad E_5\left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

1

Benennung aller gefundenen Punkte

(c) Bestimmen Sie die Art und die z-Koordinate der möglichen Extremstelle (x_E, y_E), die direkt auf der y-Achse liegt

(/ca. 3) 2

$$\Delta = f_{xx}(0,1) \cdot f_{yy}(0,1) - f_{xy}^2(0,1)$$

$$= 0 \cdot 0 - [(+1) \cdot e^{-1} \cdot 1]^2 < 0 \quad 1$$

1/2

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $S(0,1,0)$

1/2

$z = f(0,1) = 0$

3. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

(/ ca. 8 Punkte)

Ein mit zu schwach angezogener Handbremse und der Gangschaltung im Leerlauf auf ganz leicht abschüssiger Straße geparktes Auto gerät durch die Erschütterungen eines vorbeifahrenden Lastwagens von der zum Parken ausreichenden Haftreibung in die geringere Rollreibung und setzt sich mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ in Bewegung. Die zugehörige Differentialgleichung lautet allgemein $m\ddot{x} + k\dot{x} = mg \cdot \sin\alpha$ wenn α der Neigungswinkel der Straße ist.
Im speziellen Fall möge sie

$$\ddot{x} + 0{,}01 \cdot \dot{x} = 0{,}01$$

im Meter-kg-Sekunde-System lauten.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 2)

$$\lambda^2 + 0{,}01\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda + 0{,}01) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -0{,}01 \qquad 1$$

$$\Rightarrow \cancel{x}_h = C_1 \cdot e^{0t} + C_2 \cdot e^{-0{,}01t}$$

$$\Rightarrow x_h = C_1 + C_2 \cdot e^{-0{,}01t} \qquad 1$$

(b) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung.

(/ca. 2,5)

λ_1	λ_2	α	β	m	q
0	0,01	0	/	0	1

$$\alpha = \lambda_1 \Rightarrow q = 1 \qquad 1/2$$

$$\Rightarrow x_p = x^1 \cdot B_0(x) = B_0 \cdot x \qquad 1/2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_p = B_0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_p = 0 \qquad 1/2$$

$$\Rightarrow 0{,}01 \cdot B_0 = 0{,}01$$

$$\Rightarrow B_0 = 1 \qquad 1/2$$

$$\Rightarrow x_p = x$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-0{,}01t} + t$$

1/2

6

(c) Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

(/ca. 2,5)

$x(0) = 0: \quad 0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2$ 1/2

$\dot{x}(t) = -0{,}01 \cdot c_2 \cdot e^{-0{,}01t} + 1$ 1/2

$\dot{x}(0) = 0: \quad 0 = -0{,}01 \cdot c_2 + 1 \Rightarrow c_2 = 100$ 1/2

$\Rightarrow c_1 = -100$ 1/2

$\Rightarrow x_{AB} = -100 + 100 \cdot e^{-0{,}01t} + t$ 1/2

(d) Wieviel Meter hat das Auto nach $t = 100$ Sekunden zurückgelegt? (Hinweis: $e^{-1} \approx 0{,}37$)

(/ca. 1)

$x_{AB}(100) = -100 + 100 \cdot e^{-1} + 10$

$= 37\,m$ 1

4. System von linearen Differentialgleichungen

(/ ca. 7 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 9y_1 - 5y_2. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung das Systems.

(/ca. 5)

$$\vec{y}\,' = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von A:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ 9 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-5-\lambda)+27 = -35 + 5\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 27$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$ 1

1/2 1/2

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :3 \\ :9 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = \alpha \Rightarrow x_1 = \alpha$$

mit $\alpha = 1$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 1

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -3 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :3 \\ :3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = \alpha \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\alpha$$

mit $\alpha = 3$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ 1

Allg. Lösung: $\vec{y} = C_1 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1

Schreibweise mit $y_1 = \ldots, y_2 = \ldots$ auch möglich

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung unter den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 3$ und $y_2(0) = 5$.

(/ca. 2)

$y_1(0)=3: \quad C_1 + C_2 = 3$

$y_2(0)=5: \quad C_1 + 3C_2 = 5$ –

1/2

$-2C_2 = -2 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = 2$

1/2 1/2

$\Rightarrow \vec{y}_{AB} = 2e^{4x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

1/2

Lösung zur Aufgabe 4

a)

$$I) \quad y_1' = 7y_1 - 3y_2$$
$$II) \quad y_2' = 9y_1 - 5y_2$$

Ableiten von II)

(1) $$y_2'' = 9y_1' - 5y_2'$$ 1/2

II) nach y_1 auflösen

(2) $$y_1 = \frac{1}{9}y_2' + \frac{5}{9}y_2$$ 1/2

und in I)

$$y_1' = \frac{7}{9}y_2' + \frac{35}{9}y_2 - 3y_2 = \frac{7}{9}y_2' + \frac{8}{9}y_2$$ 1/2

In (1):

$$y_2'' = 7y_2' + 8y_2 - 5y_2' = 2y_2' + 8y_2$$ 1/2

Lin. Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeff. Charak. Gleichung

1/2

$$\lambda^2 - \cancel{2\lambda} - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$$ 1

Allgemeine Lösung

1/2 1/2

$$y_2(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x} \Rightarrow y_2'(x) = 4C_1e^{4x} - 2C_2e^{-2x}$$

In (2)

$$y_1(x) = \frac{4}{9}C_1e^{4x} - \frac{2}{9}C_2e^{-2x} + \frac{5}{9}C_1e^{4x} + \frac{5}{9}C_2e^{-2x} = C_1e^{4x} + \frac{1}{3}C_2e^{-2x}$$

$$\vec{y_{all}}(x) = \begin{pmatrix} C_1e^{4x} + \frac{1}{3}e^{-2x} \\ C_1e^{4x} + C_2e^{-2x} \end{pmatrix}$$ 1/2

b)

$$3 = y_1(0) = C_1 + \frac{1}{3} \text{ und } 5 = y_2(0) = C_1 + C_2$$ 1/2

Also $3 = 5 - \frac{2}{3}C_2 \Rightarrow C_2 = 3 \Rightarrow C_1 = 2$ Spezielle Lösung zum AWP

1/2 1/2

$$\vec{y_{sp}}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{4x} + e^{-2x} \\ 2e^{4x} + 3e^{-2x} \end{pmatrix}$$ 1/2

5. Aufgabe: Vektorfelder (/ ca. 6 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{D} = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\pi x}\cos(\pi y) \\ -e^{\pi x}\sin(\pi y) \end{pmatrix}$$

Weiter seien zwei Wege $C_1, C_2 \subset \mathbb{D}$ parametrisiert durch

$$\vec{r_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \ \vec{r_2}(t) = \begin{pmatrix} t(1-t) \\ t \end{pmatrix}, \ t \in [0,1],$$

die die Punkte $A = (0,0)$ und $B = (0,1)$ verbinden, gegeben.
Hinweis: Der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ ist offen und einfach zusammenhängend.

(a) Prüfen Sie ob das Vekorfeld ein Potential hat.

Integrabilitätsbedingung: (/ca. 1,5)

$$\frac{\delta v_x}{\delta y} \stackrel{!}{=} \frac{\delta v_y}{\delta x}$$

1/2 $\frac{\delta v_x}{\delta y} = -\pi e^{\pi x} \sin(\pi y)$

1/2 $\frac{\delta v_y}{\delta x} = -\pi e^{\pi x} \cdot \sin(\pi y)$

$\Rightarrow \vec{v}$ hat ein Potential 1/2

(b) Bestimmen Sie ein Potential.

$\operatorname{grad} f = \vec{v}$ (/ca. 2,5)

$\Rightarrow f_x(x,y) = e^{\pi x} \cos(\pi y)$ 1/2

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{\pi x} \cos(\pi y) + h(y)$ 1/2

$\Rightarrow f_y(x,y) = -\frac{\cancel{\pi}}{\pi} e^{\pi x} \sin(\pi y) + h_y(y)$
$= -e^{\pi x} \sin(\pi y)$ 1/2

$\Rightarrow h_y(y) = 0 \Rightarrow h(y) = k$ 1/2

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{\pi x} \cos(\pi y) + k$ 1/2

(c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale.

$$\int_{C_1} \vec{v} d\vec{r_1} \text{ und } \int_{C_2} \vec{v} d\vec{r_2}$$

(/ca. 2)

$\vec{v}$ hat ein Potential f 1

$\Rightarrow$ Wegintegrale sind wegunabhängig

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{v}\, d\vec{r}_1 = \int_{C_2} \vec{v}\, d\vec{r}_2$$

$$= f(0,1) - f(0,0)$$

$$= \frac{1}{\pi}(-1) - \frac{1}{\pi} \cdot 1 = -\frac{2}{\pi}$$ 1

6. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 4 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y \cdot y' = 2 - x, \quad 0 < x < 2$$

(a) Lösen die Differentialgleichung allgemein. (/ca. 2)

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = (2-x) \cdot \frac{1}{y} \quad 1/2$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int 2-x\,dx \quad 1/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = 2x - \frac{1}{2}x^2 + K \quad 1/2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4x - x^2 + C$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{4x - x^2 + C} \quad 1/2$$

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu $x_0 = 1$, $y_0 = y(x_0) = 1$ (/ca. 2)

$$y(1) = 1$$

$$\Rightarrow y(1) = +\sqrt{4 - 1 + C} = 1 \quad 1/2$$

$$\Rightarrow 3 + C = 1^2$$

$$\Rightarrow C = -2 \quad 1$$

$$\Rightarrow y_{AB} = +\sqrt{4x - x^2 - 2} \quad 1/2$$