HOCHSCHULE MÜNCHEN FAKULTÄT 03 FA SOSE 14

PRÜFUNG IN BACHELOR: INGENIEURMATHEMATIK II
MASCHINENBAU, FAHRZEUGTECHNIK, LUFT- UND RAUMFAHRTECHNIK -

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher,KEIN Taschenrechner
Aufgabensteller:	Kaltsidou-Kloster, Kellersch, Mahnke, Pöschl, Warendorf

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!**

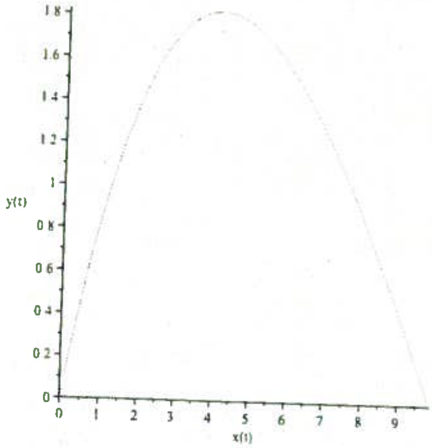
Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / ca. ~~54~~ 55
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Ebene Kurven** (/ ca. 11 Punkte)

Gegeben sei die ebene Kurve

$$C : x(t) = t^2 , \quad y(t) = t \cdot \sin(t)$$

und $0 \le t \le \pi$.



(a) Berechnen Sie die Steigung der Kurve C im Punkt $(0; 0)$.

(/ 3)

$P(0,0) \Rightarrow t = 0$ 1/2

$\dot{x} = 2t \Rightarrow \dot{x}(0) = 0$ 1/2

$\dot{y} = \sin t + t \cdot \cos t \Rightarrow \dot{y}(0) = 0$ 1/2

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Rightarrow y'(0) = „\frac{0}{0}" \Rightarrow$ L'Hospital 1/2

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{\sin t + t \cos t}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t + \cos t - t \sin t}{2}$$ 1/2

$$= \frac{2}{2} = 1$$ 1/2

(b) Welchen Radius besitzt der Krümmungskreis an die Kurve C im Punkt $(\pi^2; 0)$?

(/ 5)

$$\ddot{x} = 2 \quad 1/2$$

$$\ddot{y} = \cos t + \cos t - t\sin t = 2\cos t - t\sin t \quad 1/2$$

$$P(\pi^2; 0) \Rightarrow t = \pi \quad 1$$

$$\dot{x}(\pi) = 2\pi, \quad \ddot{x}(\pi) = 2, \quad \dot{y}(\pi) = -\pi, \quad \ddot{y}(\pi) = -2$$

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \Rightarrow \kappa(\pi) = \frac{2\pi(-2) - 2(-\pi)}{(4\pi^2 + \pi^2)^{3/2}} \quad 1$$

$$= -\frac{2}{5^{3/2} \cdot \pi^2} \quad 1/2$$

$$\Rightarrow R = \frac{5^{3/2} \cdot \pi^2}{2} \quad 1/2$$

(c) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve C und der x-Achse ($t \in [0; \pi]$).

(/ 3)

$$A = \int_0^\pi y \cdot \dot{x}\, dt$$

$$= \int_0^\pi 2t^2 \sin t\, dt \quad 1$$

$$= 2\left[\frac{2t\sin t}{1^2} - \frac{(1^2 \cdot t^2 - 2)\cos t}{1^3}\right]_0^\pi \quad 1$$

$$= 2\left(-(-\pi^2 - 2) \cdot (-1) - 2\right) \quad 1/2$$

$$= 2\pi^2 - 8 \quad 1/2$$

2. **Aufgabe: Funktion von 2 Variablen** (/ ca. 10 Punkte)

Gegeben ist die folgende auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion:

$$z = f(x, y) = x \cdot e^{x+y} + y.$$

(a) Welche Kurve ergibt der Schnitt des Graphen von $f(x, y)$ mit der Ebene $y = -x$?

$f(x, y=-x) = x \cdot e^0 - x = 0 \quad (= z)$ (/ 2)

1

$\Rightarrow$ Gerade $y = -x$ in der x, y Ebene

1

(b) Ermitteln Sie alle $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, in denen Extremwerte oder Sattelpunkte auftreten. Berechnen Sie bei Extremwerten auch deren Art.

(/ 6)

$f_x = e^{x+y} + x \cdot e^{x+y} = (x+1)e^{x+y}$ 1/2

$f_y = x \cdot e^{x+y} + 1$ 1/2

$f_x = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{x_E + y_E}}_{>0} \cdot \underbrace{(1 + x_E)}_{\Rightarrow x_E = -1} = 0$ 1

$f_y = 0 \Rightarrow x_E \cdot e^{x_E + y_E} + 1 = 0$

$\Rightarrow (-1) \cdot e^{y_E - 1} + 1 = 0$

$\Rightarrow 1 = e^{-1 + y_E} \quad | \ln$

$\Rightarrow 0 = -1 + y_E$

$\Rightarrow y_E = 1$

1 1/2

1/2 $f_{xx} = e^{x+y} + (x+1)e^{x+y} \Rightarrow f_{xx}(-1,1) = 1$

1/2 $f_{yy} = x \cdot e^{x+y} \Rightarrow f_{yy}(-1,1) = -1$

1/2 $f_{xy} = (x+1)\,e^{x+y} \Rightarrow f_{x,y}(-1,1) = 0$

$\Rightarrow \Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 \qquad \Delta\big|_{(-1,+1)} = -1 < 0$ 1/2

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $S(-1,1,f(-1,1)) = S(-1,1,0)$

1/2

(c) Berechnen Sie die Tangentialebene an die gegebene Fläche im Punkt $Q(1;-1)$.

(/ 2)

$z_0 = f(1,-1) = 0$

$\Rightarrow z - 0 = f_x(+1,-1)(x-1) + f_y(1,-1)(y+1)$

$\Rightarrow z = 2(x-1) + 2(y+1)$

$= 2x + 2y$

2

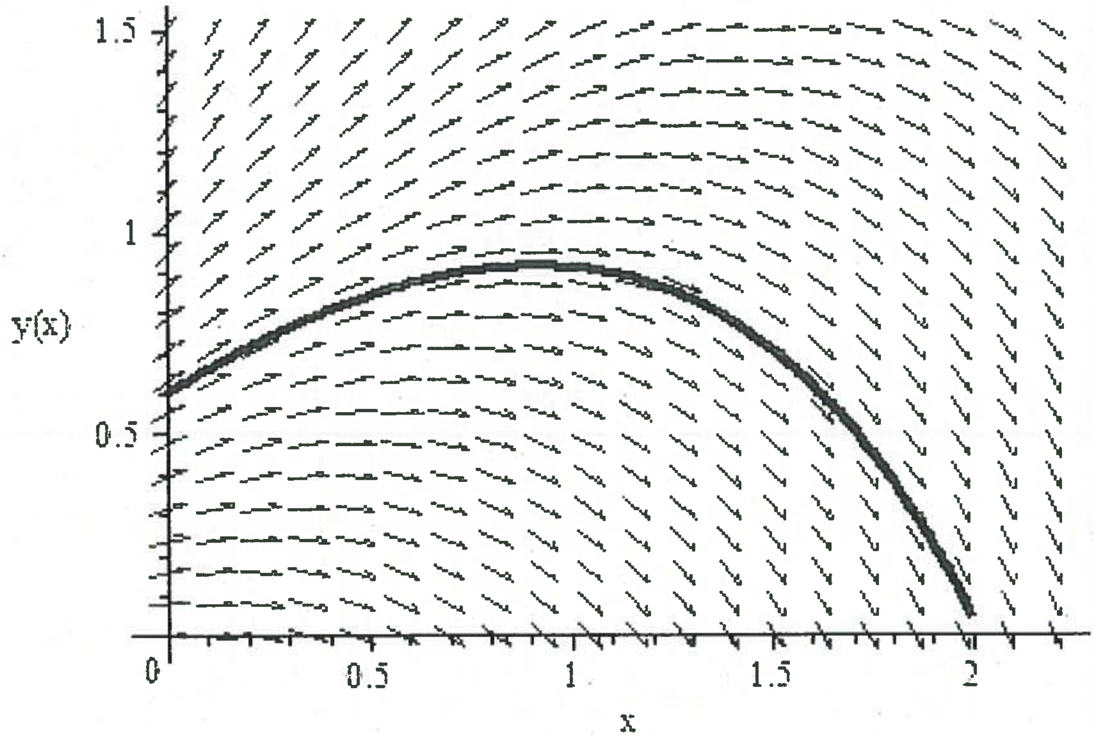
3. **Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung** (/ ca. 7 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = y - x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

(a) Zeichnen Sie in das gegebene Richungsfeld - ohne die Lösung zu berechnen - die Lösung beginnend im Punkt $P(0/0.6)$ bis $x = 2$ ein.

(/ca. 2)



2

Fortsetzung Aufgabe: Differentialgleichung 1. Ordnung

(b) Errechnen Sie eine Näherungslösung für y an der Stelle $x = 2$ mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung.
Anfangswerte: $x_0 = 0$, $y_0 = y(x_0) = 0.6$, Schrittweite $h = 2$.

(/ca. 5)

$k_1 = 2 \cdot f(0; 0.6) = 1.2$ 1/2

$k_2 = 2 \cdot f(1; 1.2) = 2 \cdot 0.2 = 0.4$ 1

$k_3 = 2 \cdot f(1; 0.8) = 2 \cdot (-0.2) = -0.4$ 1

$k_4 = 2 \cdot f(2; 0.2) = 2 \cdot (-1.8) = -3.6$ 1

$y_1 = 0.6 + \frac{1}{6}(1.2 + 0.8 - 0.8 - 3.6)$ 1/2

$= 0.6 + \frac{1}{6}(-2.4) = 0.2$ 1

4. **System von linearen Differentialgleichungen**

(/ ca. 8 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 6y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 3y_1 - y_2. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung das Systems.

(/ca. 5)

$$\vec{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \vec{y}$$

1. Eigenwete von A:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6-\lambda)(-1-\lambda)+6$$

$$= -6+\lambda-6\lambda+\lambda^2+6$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda = 0 \quad 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \;\; 1/2, \quad \lambda_2 = 5 \;\; 1/2$$

2. Eigenvektoren

EV zu $\lambda_1 = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow v_{12} = \alpha, \; v_{11} = 1/3\,\alpha$

mit $\alpha = 3$ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1

EV zu $\lambda_2 = 5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$v_{22} = \alpha, \; v_{21} = 2\alpha$

mit $\alpha = 1$ $\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow$ Allg. Lösung:

$$y = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{0x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} \quad 1$$

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung unter den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 2$ und $y_2(0) = 0$.

(/ca. 3)

$y_1 = C_1 + 2C_2 \cdot e^{5x}$

$y_2 = 3C_1 + C_2 e^{5x}$

1/2 $y_1(0) = 2 \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 2 \quad \cdot (-3)$

1/2 $y_2(0) = 0 \qquad 3C_1 + C_2 = 0$

$-5C_2 = -6$

$\Rightarrow C_2 = \frac{6}{5}$ 1

$\Rightarrow C_1 = 2 - \frac{12}{5} = -\frac{2}{5}$ 1/2

$\Rightarrow \vec{y}_{AB} = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{6}{5}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$ 1/2

5. **Aufgabe: Vektorfelder** (/ ca. 8 Punkte)

(a) Das Vektorfeld einer rotationssymmetrischen Staupunktströmung lautet

$$\vec{v} : \mathbb{D} = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ a \cdot y \\ -2 \cdot a \cdot z \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}^3$ ist offen und einfach zusammenhängend.

i. Prüfen Sie, ob das Vektorfeld ein Potential hat.

(/ca. 1,5)

1/2 $\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0$

1/2 $\frac{\partial v_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_3}{\partial y} = 0$

1/2 $\frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0$

Integrabilitätsbed. erfüllt

$\Rightarrow$ Potential existiert

ii. Bestimmen Sie, falls vorhanden, ein Potential.

(/ca. 4)

$\vec{v} = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_x = ax$ 1/2 $\Rightarrow f = \frac{a}{2}x^2 + g(y,z)$ 1/2

$\Rightarrow f_y = g'(y,z)$ 1/2

$\Rightarrow g'(y,z) = a \cdot y \Rightarrow g(y,z) = \frac{a}{2}y^2 + h(z)$ 1/2

$\Rightarrow f = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{2}y^2 + h(z)$ 1/2

$\Rightarrow f_z = h'(z)$ 1/2

$\Rightarrow h'(z) = -2az \Rightarrow h(z) = -az^2 + C$ 1/2

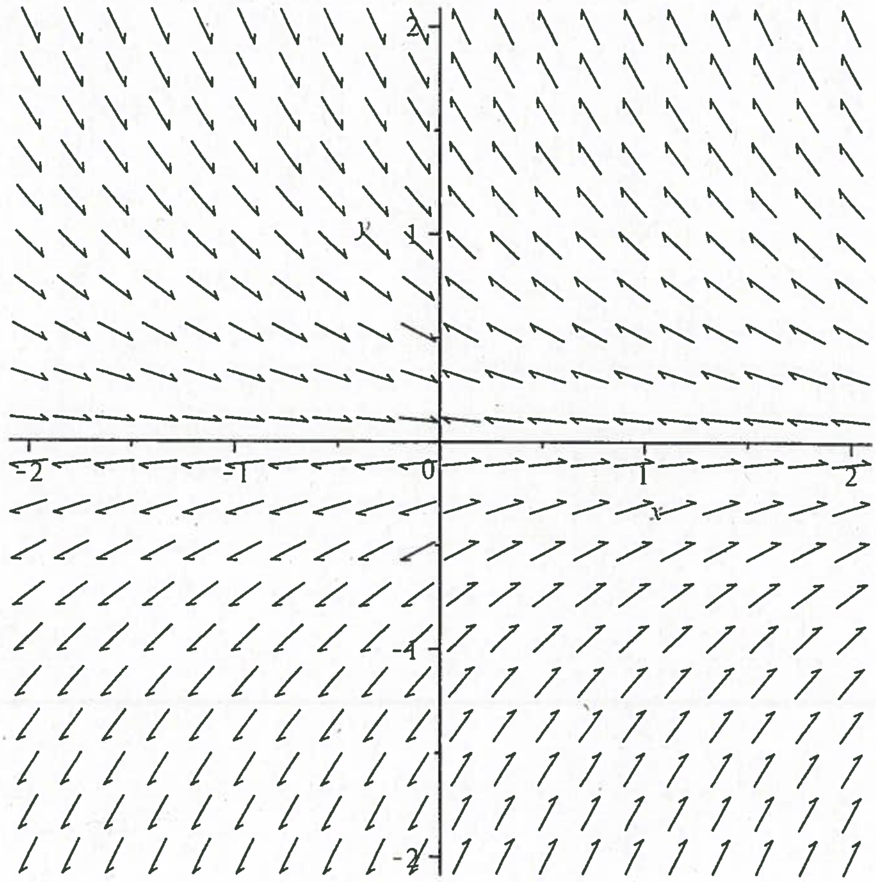
$\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{2}y^2 - az^2 + C$ 1/2

Fortsetzung Aufgabe: Vektorfelder

(b) Welches der folgenden Vektorfelder gehört zu dem dargestellten Vektorfeld (die Längen der Vektoren sind normiert)?
Begründen Sie kurz Ihre Meinung in einem vollständigen Satz!

(/ca. 2,5)

$$\vec{v_1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{y} \\ x \end{pmatrix}, \vec{v_2}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y} \\ x \end{pmatrix}, \vec{v_3}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y} \\ -x \end{pmatrix}$$



$\vec{V}_2$, da sich im 2. Quadranten für negative x und positive y fallende Vektoren (von links oben, nach rechts unten) ergeben.

1

Jede andere richtige Begründung zählt auch.

1 1/2

11

6. **Aufgabe: Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** (/ ca. ~~10~~ **Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 4y' + 5y = s_i(x) \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(/ca. 2)

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$ 1

$\Rightarrow y_h = e^{2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ 1

(b) Es sei $s_1(x) = e^{-2x}$.
Bestimmen Sie die Ansatzfunktion zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1). (Rechnen Sie NICHT die allgemeine Lösung aus.)

(/ca. 2)

λ_1	λ_2	α	β	m	q
$2+i$	$2-i$	-2	0	0	0

1

$\Rightarrow y_p(x) = A \cdot e^{-2x}$ 1

(c) Es sei $s_2(x) = e^{2x} \cdot \cos(x)$.
Bestimmen Sie die Ansatzfunktion zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1). (Rechnen Sie NICHT die allgemeine Lösung aus.)

(/ca. 2)

λ_1	λ_2	α	β	m	q
$2+i$	$2-i$	2	1	0	1

1

$\Rightarrow$

$$y_{P2} = x \cdot e^{2x} \left(C_1 \sin x + C_2 \cos x \right)$$ 1

(d) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung (1) für die Störfunktion $s_3(x) = x$ und geben Sie die allgemeine Lösung an.

(/ca. ~~4~~) 5

λ_1	λ_2	α	β	m	q
$2+i$	$2-i$	0	0	1	0

1

$\Rightarrow y_{P3} = ax + b$, 1

$\Rightarrow y_{P3}' = a$, $y_{P3}'' = 0$ 1/2

in DGL

$0 - 4a + 5ax + 5b = 1x$

$\Rightarrow 5ax + 5b - 4a = 1x + 0$ 1/2

Koeffizientenvergleich:

$5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$ 1/2

$5b - 4a = 0 \Rightarrow 5b = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{4}{25}$ 1/2

$\Rightarrow y_{P3} = \frac{\cancel{4}\,1}{5} x + \frac{4}{25}$ 1/2

$\Rightarrow y_{allg} = e^{2x} \left(C_1 \sin x + C_2 \cos x \right) + \frac{\cancel{4}\,1}{5} x + \frac{4}{25}$

1/2