HOCHSCHULE MÜNCHEN FAKULTÄT 03 SS 2014

MATHEMATIK I - MB, FA, LR

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripten, Bücher
Prüfer:	Prof. Dr. Selting, Dr.-Ing. Vielemeyer und Koll.

!!! Wichtig:

Die Aufgabenstellung umfasst **6 Aufgaben** auf 12 Seiten.
Die Verwendung eines **Taschenrechners** ist **nicht zulässig**!
Alle Rechnungen und Ergebnisse sind auf diesem Arbeitsblatt einzutragen.
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg bzw. die Begründung muss nachvollziehbar sein.

Name: Vorname: **Unterschrift:**	Geb.-Datum: Stud.-Gruppe:	Punkte: Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

Aufgabe 1: Folgen (Σ / ca. 6 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des bekannten Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$$

(für jede Nullfolge a_n) den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2\cdot n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2+3-3}{n+3}\right)^{2n-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-5}{n+3}\right)^{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-5}{n+3}\right)^{-\frac{n+3}{5} \cdot \frac{(2n-1)(-5)}{n+3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left[\Big(1 + \underbrace{\frac{-5}{n+3}}_{=:\, a_n \text{ (Nullfolge)}}\Big)^{-\frac{n+3}{5}}\right]^{\frac{-10n+5}{n+3}}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\left[\left(1 + \frac{-5}{n+3}\right)^{-\frac{n+3}{5}}\right]}_{\to e} \right\}^{\frac{-10+(\cdot}{1+(\cdot}}$$

$$= e^{-10}$$

Aufgabe 2: Reihen (Σ / ca. 6 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der ersten beiden (von Null verschiedenen) Terme der Mac Laurin Reihe $T_2(x)$ der Funktion $\sin(x^2)$ eine Näherung für das Integral

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \approx \int_0^1 T_2(x)\,dx$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung von $T_2(x)$ die bekannte Sinusreihe.

Sinusreihe : $\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} \mp \dots$

Substitution : $u := x^2$

$$\Rightarrow \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} \pm \dots$$

$$T_2(x) = x^2 - \frac{x^6}{6}$$ 2

Integration :

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \approx \int_0^1 x^2 - \frac{x^6}{6}\,dx = \dots$$ 1

$$\dots = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 6}\right]_0^1$$ 1

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{14-1}{42} = \frac{13}{42}$$

1 1

Aufgabe 3: Differentialrechnung (Σ / ca. 8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}.$$

5

(a) Berechnen Sie erste und zweite Ableitung f'(x) und f"(x). (ca. ~~4~~ P.)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - (x+2)\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left[\sqrt{x}\right]^2}$$

$$= \frac{x - \frac{1}{2}x - 1}{x\sqrt{x}}$$

2

$$= \frac{\frac{1}{2}x - 1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} - \left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right)$$

3

$$= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

(b) Bestimmen Sie Art und Lage des lokalen Extremums der Funktion (vgl. (a))

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

Berechnen Sie den Wert der 2. Abl. an der Extremstelle. (ca. ~~4~~ 3 P.)

Extremum: Notwendige Bedingung

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x - 1}{x\sqrt{x}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x - 1 = 0 \iff \underline{x = 2} \quad 1$$

$$f''(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} 2^{-5/2}$$

$$= -2^{-2} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-5/2}$$

$$= -2^{-\frac{7}{2}} + 3\, 2^{-\frac{7}{2}}$$

$$= 2^{-\frac{7}{2}}(3-1) = 2^{-\frac{7}{2}+1}$$

$$= 2^{-\frac{5}{2}} > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

1

bei

$$\left(2, \frac{4}{\sqrt{2}}\right) =$$

1 $= \underline{(2, 2\sqrt{2})}$

Aufgabe 4: Integralrechnung (Σ / ca. 6 Punkte)

(a) Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int \frac{2}{x^2 - 2x}\, dx.$$

(ca. 4 P.)

PBZ:

$$\frac{2}{x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad 2 = A(x-2) + Bx$$

Einsetzen von

$x = 0$: $2 = -2A \Rightarrow A = -1$ 1

$x = 2$: $2 = 2 \cdot B \Rightarrow B = 1$ 1

Integration:

$$\int \frac{2}{x^2-2x}\, dx = \int \frac{-1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x-2}\, dx$$

$$= -\ln|x| + \ln|x-2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + C \quad 1$$

(b) Konvergiert oder divergiert das uneigentliche Integral (vgl. (a))

$$\int_3^\infty \frac{2}{x^2 - 2\,x}\,dx?$$

Begründen Sie Ihre Antwort nachvollziehbar durch Rechnung. (ca. 2 P.)

$$\int_3^\infty \frac{2}{x^2-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\right]_3^b$$

$$1 \quad = \lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{b-2}{b}\right| - \ln\frac{1}{3}$$

$$= \ln\left|\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{2}{b}\right)\right| - \ln\frac{1}{3}$$

$$= \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \ln(3) = \ln(3) \quad 1$$

$\Rightarrow$ Konvergenz

Aufgabe 5: Komplexe Zahlen (Σ / ca. 6 Punkte)

(a) Lösen Sie folgende Gleichung in $\mathbb{C}$:

$$(\cos x + j\,\sin x) \cdot (\cos 2x + j\,\sin 2x) = -1; \quad x \in [0, 2\,\pi[$$

Anmerkung: j bezeichnet hier die imaginäre Einheit.

Hinweis: Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Eulersche Formel (ca. 4 P.)

$$(\cos x + j \cdot \sin x)(\cos 2x + j \sin 2x) = -1$$

Euler

$$\Leftrightarrow \quad 1 \quad e^{jx} \cdot e^{j2x} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \quad e^{j3x} = -1$$

$$\Rightarrow \quad 3x_k = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(für $x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \quad 1 \quad x_k = \frac{2k+1}{3}\pi$$

Für $x \in [0, 2\pi[$ verbleiben die Lösungen $x_0 = \frac{1}{3}\pi$ und

$$x_1 = \frac{3}{3}\pi = \pi$$

1

$$x_2 = \frac{5}{3}\pi$$

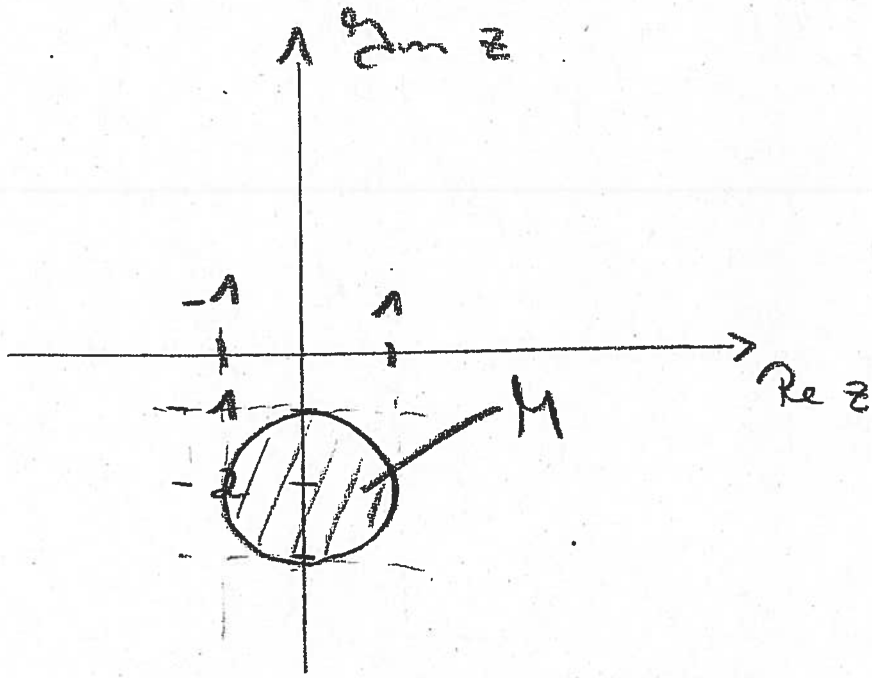
(b) Geben Sie in Worten eine geometrische Beschreibung folgender Punktmenge in $\mathbb{C}$ an und skizzieren Sie diese in der Gaussschen Zahlenebene:

$$M := \{z \in \mathbb{C} : \|z + 2j\| \leq 1\}$$

(ca. 2 P.)

$$|z + 2j| \leq 1 \iff |z - (-2j)| \leq 1$$

Die Menge M ist eine Kreisscheibe (einschl. Randpunkte) um Mittelpunkt
(1) $-2j$ mit Radius 1



(1)

Aufgabe 6: Eigenwerte und Eigenvektoren (∑ / ca. ~~6~~ 8 Punkte)

Gegeben sei folgende 3×3-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen normiert Eigenvektoren der Matrix A.

Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \{ (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 \}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \{ \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 \}$$

2

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

$\Rightarrow$ EWe: $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 6$

1

Eigenvektoren:

zu $\lambda_{1/2} = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 1$$

$\Rightarrow \quad v_2 = \beta \in \mathbb{R}$, beliebig

$v_1 = 2v_3$, setze $v_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, bel.

$\Rightarrow$ Eigenraum zu $\lambda_{1/2} = 1$: $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\left[\quad \vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right]$

$\Rightarrow \quad v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1, $\quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

zu $\lambda_3 = 6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 1$$

$\Rightarrow \quad v_2 = 0$

$2v_1 = -v_3$

$v^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow$ Eigenraum zu $\lambda_3 = 6$: $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$