BACHELORPRÜFUNG IN INGENIEURMATHEMATIK I - FA - MB - LR

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Sktripte, Bücher, KEIN Taschenrechner
Aufgabensteller:	Pöschl, Schlüchtermann, Warendorf

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen! Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!**

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / max. 50
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **(Lineare Abhängigkeit, Lineare Gleichungssysteme)** (/ca. 8 Punkte)

(a) Man bestimme den Parameter a so, dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \text{ in der von den Vektoren } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ aufgespannten Ebene liegt.}$$

(/ 2)

$$\frac{1}{2} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = V_{Sp} = 0 = 1 + 0 + 3a - 3 - 2a - 0 \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \qquad = a - 2 \Rightarrow \boxed{a = 2} \quad \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{oder}}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{aligned} 1 &= 2\lambda + \mu \ (*) \ | \cdot (-1) \\ a &= \lambda \\ 3 &= 3\lambda + \mu \ (**) \end{aligned} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad 2 = \lambda \ (***)$$

$$(***) \text{ in } (*) \Rightarrow \mu = 1 - 2 \cdot 2 = \boxed{\mu = -3} \quad \frac{1}{2}$$

(b) Bestimmen Sie einen Vektor der zu den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ senkrecht steht.}$$

(/ 2)

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \quad 1/2$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} \quad 1/2$$

$$= \vec{e}_x (0 \cdot 3 - 1 \cdot 1) + \vec{e}_y (1 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + \vec{e}_z (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) \quad 1/2$$

$$= -\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

(c) Welche Koordinaten hat der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man löse das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(/ 4)

λ_1	λ_2	λ_3	Abs	
1	2	−1	1	$\cdot(-1)$ 1/2
0	1	2	1	+ 1/2
1	3	−1	1	1/2
1	2	−1	1	
0	1	2	1	+
0	1	0	0	$\cdot(-1)$ 1/2
1	2	−1	1	(*)
0	1	2	1	(**)
0	0	2	1	

1/2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2\lambda_3 = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = \frac{1}{2}}$ 1/2

aus (**): $\lambda_2 = 1 - 2\lambda_3 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0}$ 1/2

aus (*): $\lambda_1 = 1 - 2\lambda_2 + \lambda_3$

$= 1 - 2 \cdot 0 + \frac{1}{2}$

$\boxed{\lambda_1 = \frac{3}{2}}$ 1/2

2. **(Matrizenmultiplikation, Eigenwerte und Eigenvektoren)** (/ca. **10 Punkte**)

(a) Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

berechne man die Produkte $A \cdot B$ und $A^T \cdot A$.
Welche besondere Matrix ergibt sich bei $A^T \cdot A$?

(/ 3)

A	B	1	2	2	
		3	2	1	
-1	2	5	2	0	
4	1	7	10	9	$A \cdot B$

pro richtigem Element 1/4 Pkt, insgesamt für 1½

A^T	A	-1	2	
		4	1	
-1	4	17	2	
2	1	2	5	$A^T \cdot A$

pro richtigem Element 1/4 Pkt, insgesamt für 1

$A^T \cdot A$ ist symmetrisch ½

(b) Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(/5)

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$ 1/2

$$0=(\lambda^2-1)-8=\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)$$ 1/2

1/2 $\lambda_1=+3$ $\quad\lambda_2=-3$ 1/2

EV zu EW $\lambda_1=3$

1/2

$$\begin{pmatrix}-1-3 & 2\\ 4 & 1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{pmatrix}\quad -4x_{11}+2x_{12}=0 \Rightarrow$$

$x_{12}=2x_{11}$ 1/2

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}\\ 2x_{11}\end{pmatrix}=\varkappa\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$ 1/2 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2=-3$

1/2

$$\begin{pmatrix}-1-(-3) & 2\\ 4 & 1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{pmatrix}\quad 2x_{21}+2x_{22}=0 \Rightarrow$$

$x_{22}=-x_{21}$ 1/2

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{21}\\ -x_{21}\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$ 1/2

(c) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix A.

(/2)

A	-1	2	1	0	E_2 $\quad$ $\cdot 4$ $+$
	4	1	0	1	
	-1	2	1	0	$\cdot 9$ $+$ 1/2
	0	9	4	1	$\cdot(-2)$
	-9	0	1	-2	$:(-9)$ 1/2
	0	9	4	1	$:(9)$
E_2	1	0	$-1/9$	$2/9$	1/2
	0	1	$4/9$	$1/9$	1/2

$\boxed{\text{oder}}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -9 \quad 1/2$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1 \\ \alpha_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4 \\ \alpha_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2 \\ \alpha_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1 \end{aligned}\right\}$$

1/4 Pkt pro α_{jk}

insgesamt 1

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 & 2/9 \\ 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

1/2

3. **(Integration)** (/ca.11 Punkte)

(a) (Partialbruchzerlegung)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$I = \int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}dx$$

$$N = x^2+2x-8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2}$$ 1/2 (/5)

1/2 $x_1 = +2$ $x_2 = -4$ 1/2

$$\Rightarrow \frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{3x-5}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+4)} \quad | \cdot N$$ 1/2

$$(3x-5) = A(x+4) + B(x-2)$$ 1/2

für $x=2 \Rightarrow 3\cdot 2-5 = 1 = A(2+4) \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{6}}$

für $x=-4 \Rightarrow 3\cdot(-4)-5 = -17 = B(-4-2) \Rightarrow \boxed{B = \frac{17}{6}}$

1/2

$$I = \int \frac{1/6}{x-2}dx + \int \frac{17/6}{x+4}dx$$ 1/2

$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{17}{6}\ln|x+4| + C$$

1/2 1/2 1/2

(b) Gegeben sei die Funktion F

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} e^{t^2} \sin t dt, \text{ für } x \in [-\pi, \pi]$$

i. Bestimmen Sie die Ableitung $F'(x)$. (/ 1)

$F'(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x)$ 1

ii. Welche Extremwerte von F gibt es in $[-\pi, \pi]$ (nur x–Wert)? (/ 1,5)

$F'(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0$ (da $e^{x^2} > 0$) 1

$\sin(x) = 0$

$x_1 = -\pi$ (unterer Rand) 1/2

$x_2 = 0$ im $\mathbb{D}$ 1/2

$x_3 = \pi$ (oberer Rand) 1/2

jeweils 1/2 Sonderpunkt

iii. Geben Sie für eventuelle Extremwerte die Art an? Benutzen Sie dazu

A. einmal die zweite Ableitung. (/ 1,5)

B. die geometrische Eigenschaft des Integranden $e^{t^2} \sin t$ bzw. der ersten Ableitung. (/ 2)

(A) $F''(x) = 2x e^{x^2} \cdot \sin(x) + e^{x^2} \cdot \cos(x)$

$= e^{x^2} \{2x \cdot \sin(x) + \cos(x)\}$ 1/2

$F''(x=0) = e^{0} \{2 \cdot 0 \cdot 0 + 1\} = 1 > 0$ 1/2

$\Rightarrow$ Min 1/2

(B) e^{t^2} ist gerade (achsensym.)

$\sin(t)$ ist ungerade (punktsym.) $\} \Rightarrow$

der Integrand $e^{t^2} \cdot \sin(t)$ ist ungerade 1/2

(punktsym.)

$\Rightarrow F(-\pi) = \int_{-\pi}^{-\pi} \cdots dt = 0$ (obere Grenze = untere Gr)

$F(+\pi) = \int_{-\pi}^{+\pi} (\text{unsym. Fkt}(t))\, dt = 0$ 1/2

Da es nur einen Extremwert im $\mathbb{D}$ gibt, existiert keine andere Nullstelle von $F(x)$

$F'(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x) < 0$ für $x < -|\varepsilon|$

$F'(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x) > 0$ " $x > +|\varepsilon|$ $\Big\}$ $|\varepsilon| \to 0$ 1/2

d.h. links vom Extremum $F'(x) < 0$

rechts " " $F'(x) > 0$ $\Big\} \Rightarrow$ Extr = Min 1/2

4. **(Differenzialrechnung und Potenzreihen)** (/ca. 9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ und stellen Sie sie mit Hilfe von $\tanh(x)$ dar. (/ 2)

Nach der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{\{\sinh(x)\}' \cdot \cosh(x) - \sinh(x) \cdot \{\cosh(x)\}'}{\cosh^2(x)} \quad 1/2$$

$$= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \quad 1/2$$

1

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $(f^{-1})'(t)$ mit Hilfe von a). (/ 2,5)

$$g(t) = (f^{-1})'(t) = \operatorname{artanh}'(t) \quad 1/2$$

$$\frac{d}{dt}(f^{-1}) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} = \quad 1/2$$

$$= \frac{1}{1 - \{\tanh(\operatorname{artanh}(t)\}^2} = \quad 1$$

$$= \frac{1}{1-t^2} \quad 1/2$$

(c) Geben Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $(f^{-1})'(t)$ als Potenzreihe an, indem Sie die geometrische Reihe verwenden (und deren Formel).

(/ 2,5)

1/2 Substitution: $q = t^2 \quad q < 1 \Rightarrow |t| < 1$ 1/2

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$ 1/2

1/2

Rücksubst.

$$(f^{-1})'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}$$ 1/2

(d) Geben Sie nun für $f^{-1}(t)$ eine Darstellung in einer Potenzreihe an.

(/ 2)

$$f^{-1}(t) = \int (f^{-1})'(t)\,dt = \int \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\,dt$$ 1/2

wegen des 1. Hauptsatzes gilt

$$f^{-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + C$$ 1/2

$$f^{-1}(t=0) = \operatorname{artanh}(0) = C \quad | \tanh$$

$$\tanh(\operatorname{artanh}(0)) = 0 = \tanh(C)$$

1/2

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}$$ 1/2

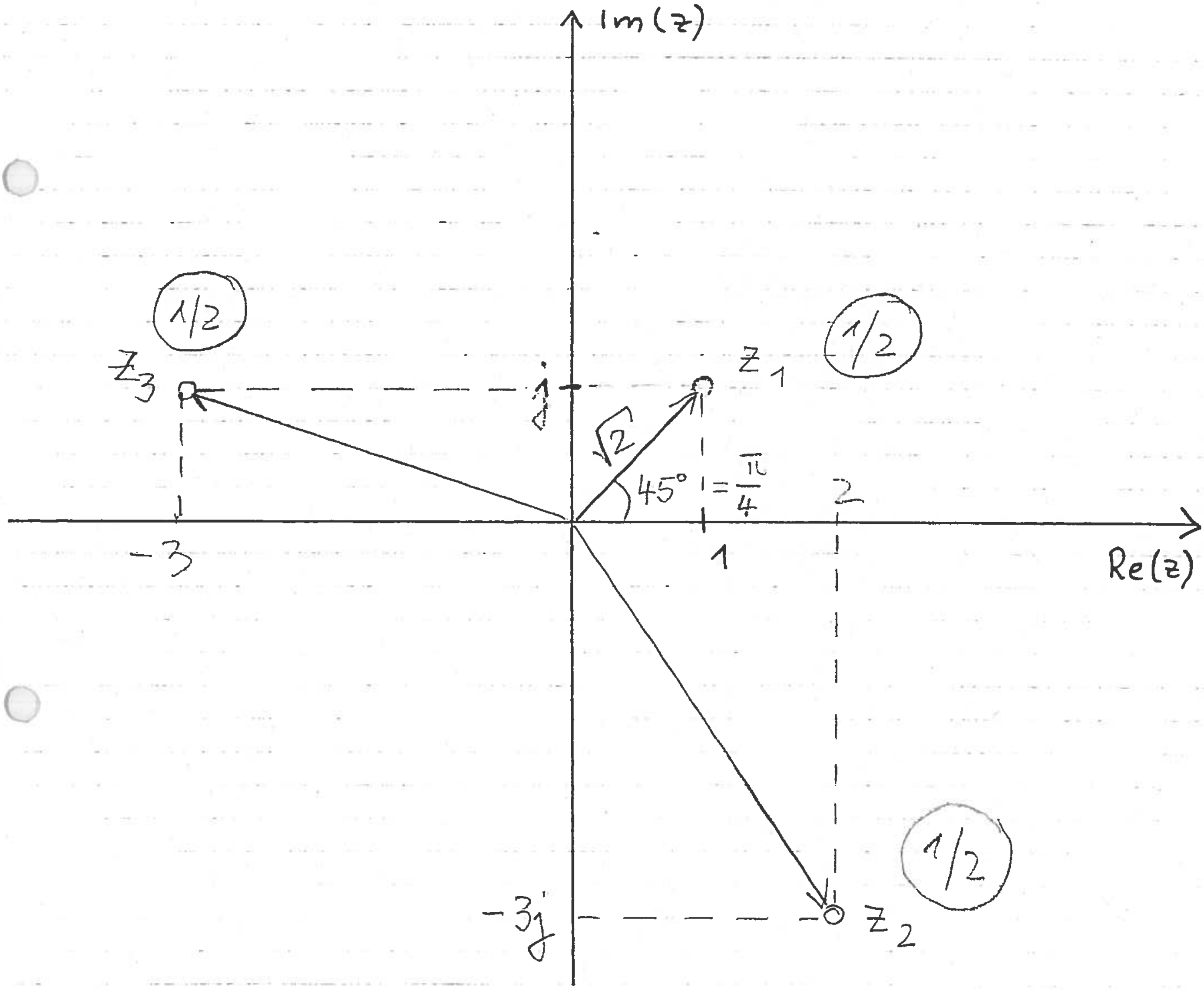
5. **(Komplexe Zahlen)** (/ca. **12 Punkte**)

Gegeben sind die drei komplexen Zahlen (j ist die imaginäre Einheit)

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \\ z_2 &= 2-3j \\ z_3 &= -3+j \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie z_1, z_2 und z_3 in das Koordinatenkreuz ein. Lesen Sie z_1 in arithmetischer Form und z_2, z_3 in Exponentialform (Eulerdarstellung) ab.

(/ 4)



$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + j$$

1

$$r_2 = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\varphi_2 = \arctan\frac{-3}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{matrix}\right\} z_2 = \sqrt{13}\cdot e^{j\left(\arctan\frac{-3}{2}\right)}$$

1/2

$$r_3 = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$$

$$\varphi_3 = \arctan\frac{1}{-3}$$

$$\left.\begin{matrix} r_3 \\ \varphi_3 \end{matrix}\right\} z_3 = \sqrt{10}\cdot e^{j\left(\arctan\frac{1}{-3}\right)}$$

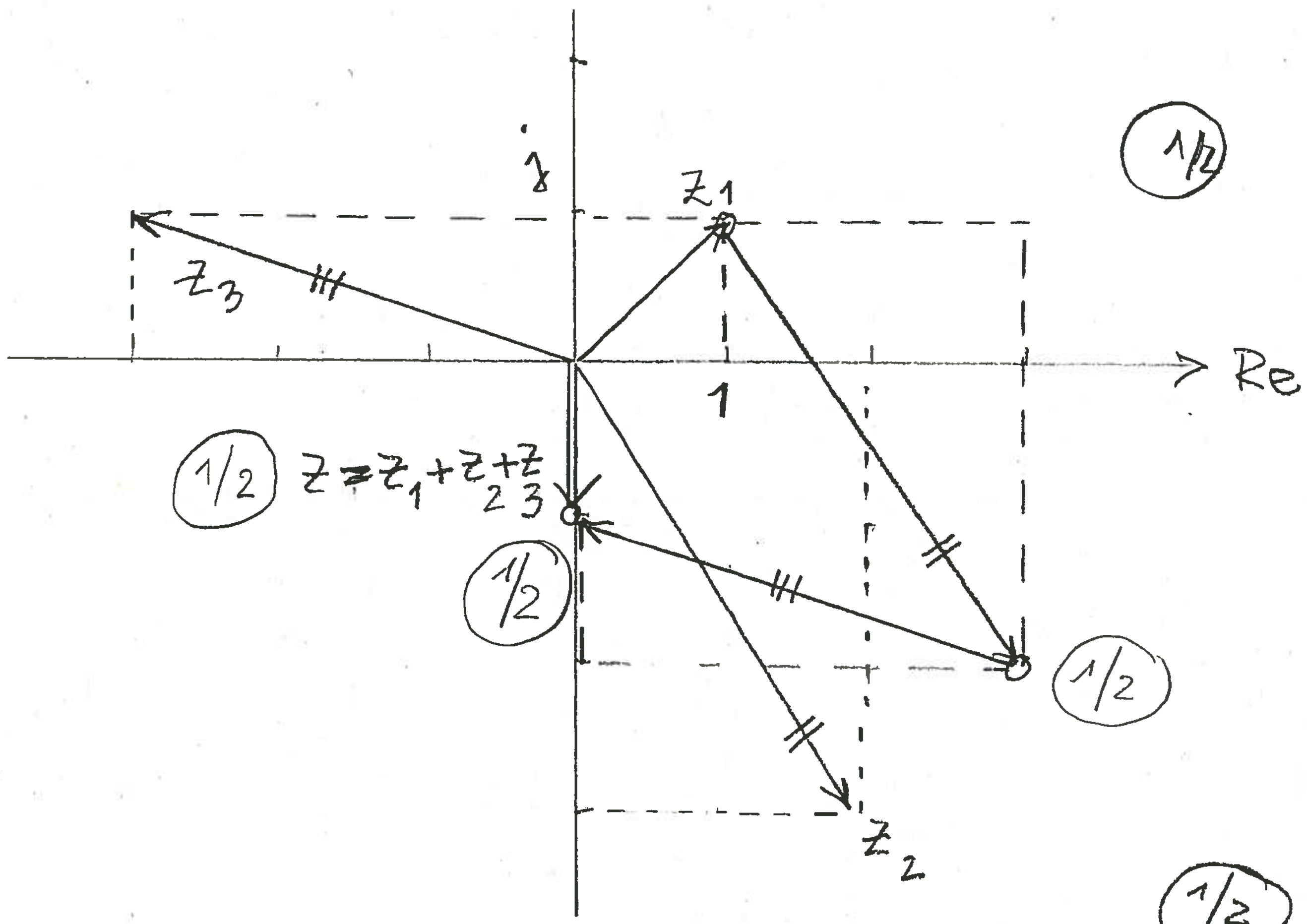
1

Ablesen reicht!

(b) Bilden Sie graphisch die Summe von z_1, z_2 und z_3. Lesen Sie das Ergebnis in arithmetischer Form und in Exponentialform (Eulerdarstellung) ab. (2/2)

Bestimmen Sie anschließend die Summe analytisch und geben Sie das Ergebnis sowohl in arithmetischer Form als auch in Exponentialform (Eulerdarstellung) an.

$(3\frac{1}{2}/3\frac{1}{2})$ (/ 5,5)



$$z = 0 - j \quad (1/2) \quad \Rightarrow r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \quad (1/2)$$

$$\varphi = \arctan\frac{-1}{0} \rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad (1/2)$$

$$z = 1 \cdot e^{\frac{3\pi}{2} j} \quad (1/2)$$

$$z = \cancel{\left(1 + \sqrt{13}\cos\frac{2}{\sqrt{13}} + \sqrt{10}\cos\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) + j\left(1 + \sqrt{13}\sin\frac{-3}{\sqrt{13}} + \sqrt{10}\sin\frac{1}{\sqrt{10}}\right.}$$

(1/2) (1/2)

$$= (1+j) + (2-3j) + (-3+j) = (1+2-3) + j(1-3+1)$$

$$= \emptyset - j \quad (1/2)$$

reicht

(c) Berechnen Sie die Ausdrücke

i) $z_4 = z_2 \cdot z_3$ 1 und ii) $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ $1\frac{1}{2}$

jeweils mittels arithmetischer Darstellung.

(/ 2,5)

$z_4 = (2-3j)(-3+j) =$

$= 2\cdot(-3) - 3j\cdot(-3) + 2\cdot j - (3j)\cdot j =$ 1/2

$= -6 + 9j + 2j + 3$

$= \underline{-3 + 11j}$ 1/2

$z_5 = \frac{2-3j}{-3+j} \cdot \frac{(-3-j)}{(-3-j)} =$ 1/2

$= \frac{2\cdot(-3) - 3j\cdot(-3) + 2\cdot(-j) - 3j(-j)}{(-3)^2 - j^2}$ 1/2

$= \frac{-6+9j-2j-3}{9+1} =$

$= \frac{-9+7j}{10} = \underline{-0{,}9 + 0{,}7j}$ 1/2