# BACHELORPRÜFUNG IN MATHEMATIK II - FA - MB - LR

| | |
|---|---|
| Arbeitszeit: | 90 Minuten |
| Hilfsmittel: | Formelsammlung, Skripte, Bücher, KEIN Taschenrechner |
| Aufgabensteller: | Mahnke, Vielemeyer et al. |

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen**!
**Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein**!

| | | |
|---|---|---|
| Name: | Geb.-Datum: | Punkte: / max. 68 |
| Vorname: | Stud.-Gruppe: | Korr.: |
| Raum/Platz-Nr.: | Aufsicht: | Note: |

1. **Aufgabe: Funktionen mehrerer Veränderlicher ( /max. 18 Punkte)**
   Gegeben ist die Funktion
   $$z = f(x, y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right).$$

   (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ der Funktion $f$ an.

   ( / 1 )

   (b) Welche Kurven bilden die Höhenlinien der Funktion für $z = c \in \mathbb{R}$ ($c$ sei konstant)? Unterscheiden Sie dabei die folgenden drei Fälle $c < 0$, $c = 0$ und $c > 0$.

   ( / 5 )

(c) Bestimmen Sie - sofern vorhanden - Art und Lage möglicher Extrema und/oder Sattelpunkte der Funktion $f$ und geben Sie deren Funktionswerte an.

( / 9 )

(d) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Tangentialebene an den Graphen von $f$ im Punkt $(1;0)$. Der dabei auftretende Wert $\ln(2)$ muss nicht ausgerechnet werden.

( / 3 )

2. **Aufgabe: ebene Kurven** **( /max. 12 Punkte)**

Gegeben sei die ebene Kurve $\alpha$, mit

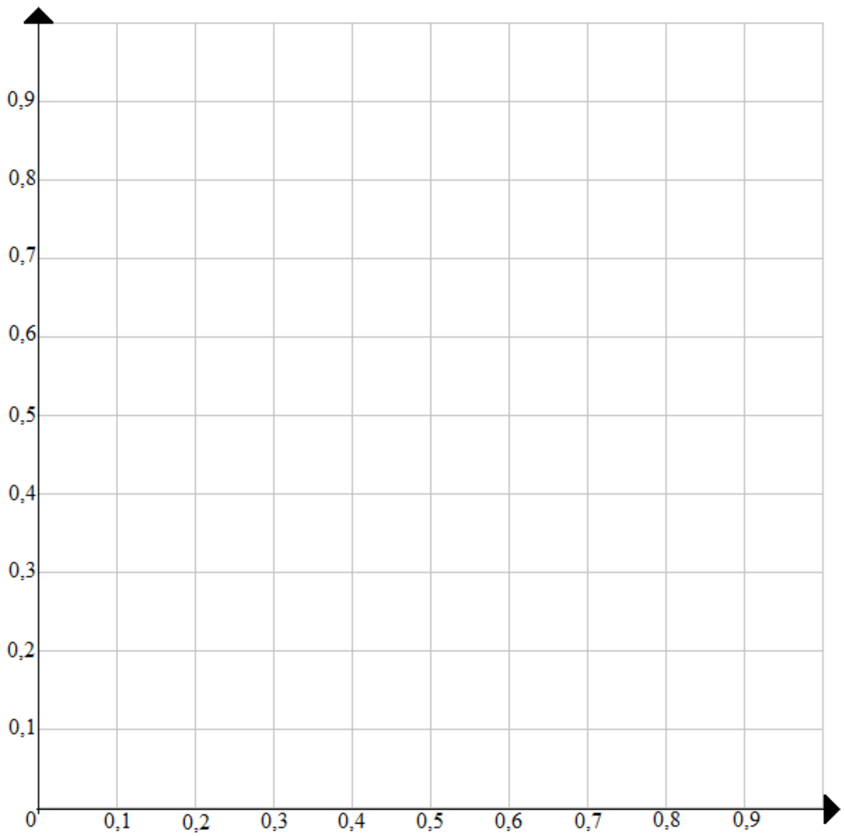
$$x(t) = \sin(t)\,,\ y(t) = \sin(t) \cdot \cos(t)$$

und $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

(a) Zeichnen Sie die Kurve in das vorgegebene Koordinatensystem mittels der angegebenen Wertetabelle.

( / 2 )

| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{8}$ | 0,38 | 0,35 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,71 | 0,50 |
| $\frac{3\pi}{8}$ | 0,92 | 0,35 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1,00 | 0 |



(b) Bestimmen Sie die $t$-Werte und die Koordinaten der Punkte mit vertikaler bzw. horizintaler Tangente. Zeichnen Sie zu diesen Punkten die Tangenten in das Koordinatensystem ein.

( / 6 )

(c) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve $\alpha$ und der $x$-Achse.

( / 3 )

(d) Erläutern Sie in einem Satz, wie sich die Kurve für $t \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ fortsetzt.

( / 1 )

3. **Aufgabe: Anwendung Funktionen mehrerer Veränderlicher (     /max. 7 Punkte)**

Es ist folgende Tabelle mit Messwerten gegeben

| Messung | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0,5 | 2 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 1,5 | 5 |

Geben Sie die Gleichung der Geraden an, welche die Messwerte am besten annähert. Verwenden Sie dazu die aus der Methode der kleinsten Quadrate bekannten Formeln.

4. **Aufgabe:Vektorfelder und Kurvenintegrale** **( /max. 14 Punkte)**
Mit festem $a, b \in \mathbb{R}$ sei im $\mathbb{R}^2$ das folgende Vektorfeld gegeben:

$$\vec{v}\,(\,x\,,\,y\,) = \big(\,bxy - ax + 6\,,\,x^2 + ax + b\,\big)^T = \begin{pmatrix} bxy - ax + 6 \\ x^2 + ax + b \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Werte von $a$ und $b$ ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld? Geben Sie für diese Werte von $a$ und $b$ die Potentiale an.

( / 7 )

(b) Es seien nun $a = 0$ und $b = 1$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v}\, d\vec{r}$$

über die Kurve $\mathcal{C}$, mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (\cos(t)\,,\, \sin(t))^T = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

durch $\vec{v}$ für $t \in [0; 2\pi]$.

( / 6 )

Rechenseite für Aufgabe 4b

(c) Welche Aussage kann man aufgrund dieses Ergebnisses über das Vektorfeld $\vec{v}$, mit $a = 0$ und $b = 1$ machen?

( / 1 )

5. **Aufgabe: Differentialgleichungen** **( /max. 17 Punkte)**
Gegeben ist die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}$$

(a) Geben Sie für das homogene Problem

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

eine allgemeine Lösung an.

( / 4 )

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}$$

mittels einer speziellen Ansatzfunktion.

( / 6 )

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\ .$$

( / 7 )