Legende: ✓: 1 Pkt. ✗: $\frac{1}{2}$ Pkt. ✗✗: $\frac{1}{4}$ Pkt.

Hochschule München	Fakultät 03 FA	WiSe 2013 2014

Bachelorprüfung in Mathematik II - FA - MB - LR

Arbeitszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Formelsammlung, Skripte, Bücher, KEIN Taschenrechner
Aufgabensteller:	Mahnke, Vielemeyer et al.

WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!

Name:	Geb.-Datum:	Punkte: / max. 68
Vorname:	Stud.-Gruppe:	Korr.:
Raum/Platz-Nr.:	Aufsicht:	Note:

1. **Aufgabe: Funktionen mehrerer Veränderlicher (/max. 18 Punkte)**
Gegeben ist die Funktion

$$z = f(x, y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right).$$

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ der Funktion f an. (/1)

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^2 \checkmark$$

(b) Welche Kurven bilden die Höhenlinien der Funktion für $z = c \in \mathbb{R}$ (c sei konstant)? Unterscheiden Sie dabei die folgenden drei Fälle $c < 0$, $c = 0$ und $c > 0$. (/5)

$$c = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad | e^{(\cdot)}$$

$$e^c = 1 + x^2 + y^2 \quad | -1$$

$$e^c - 1 = x^2 + y^2 \checkmark$$

1. $c < 0 \Rightarrow e^c < 1 \Rightarrow e^c - 1 < 0 \Rightarrow$ keine Höhenlinien ✓

2. $c = 0 \Rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow e^c - 1 = 0 \Rightarrow$ Nur der Pkt $(0/0)$ als Höhenlinie ✓

3. $c > 0 \Rightarrow e^c > 1 \Rightarrow e^c - 1 > 0 \Rightarrow$ Höhenlinie sind Kreise ✓ mit Radius $r = \sqrt{e^c - 1}$ ✗ und $M(0/0)$. ✗

(c) Bestimmen Sie - sofern vorhanden - Art und Lage möglicher Extrema und/oder Sattelpunkte der Funktion f und geben Sie deren Funktionswerte an.

(/9)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2} = 0 \iff x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2} = 0 \iff y=0$$

$\Rightarrow$ mögl. Extremum in (0/0)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(1+x^2+y^2)\cdot 2 - 4x^2}{(1+x^2+y^2)^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0/0)} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(1+x^2+y^2)\cdot 2 - 4y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0/0)} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0/0)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0/0)} = 0$$

$$\Rightarrow \det(\mathrm{Hess}f\,(0;0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \text{Extremum}$$

$\Rightarrow$ wg. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0) = 2 > 0$ liegt bei (0/0) ein Minimum vor.

(d) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1;0)$. Der dabei auftretende Wert $\ln(2)$ muss nicht ausgerechnet werden.

(/3)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1;0) = 1 \quad \checkmark \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1;0) = 0 \quad \checkmark$$

$$f(1;0) = \ln(2) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow T_{f;(1;0)}(x;y) = f(1;0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1;0) \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1;0)\,(y-0) \quad \checkmark$$

$$= \ln(2) + (x-1) + 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = (\ln(2)-1) + x}} \quad \checkmark$$

2. Aufgabe: ebene Kurven (/max. 12 Punkte)

Gegeben sei die ebene Kurve α, mit

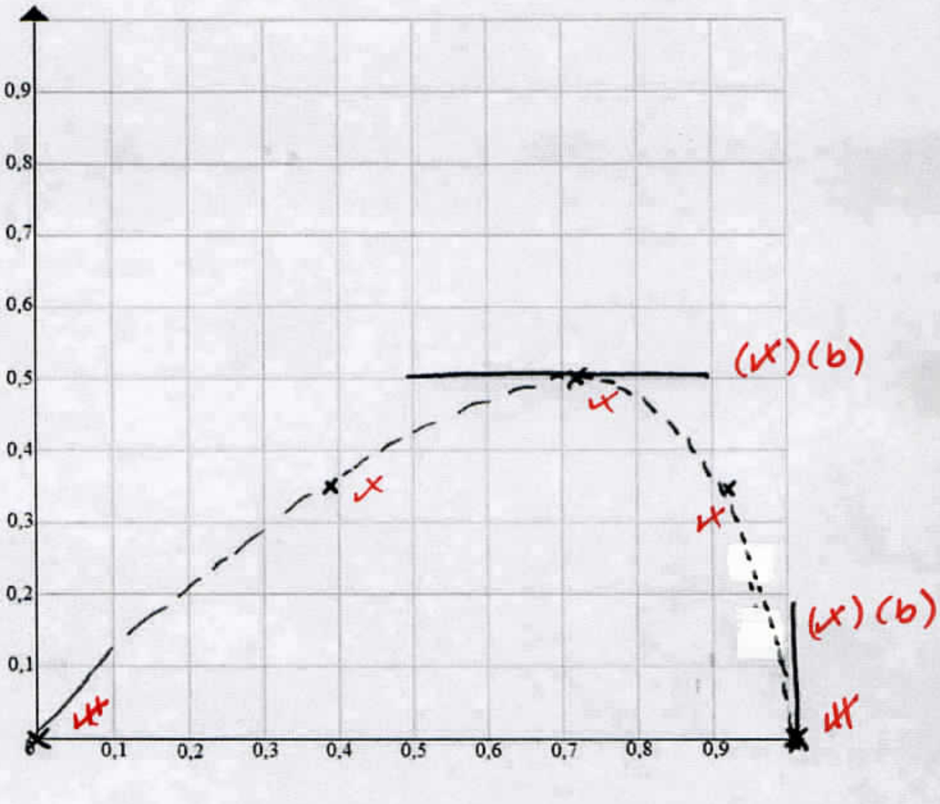
$$x(t) = \sin(t)\,,\ y(t) = \sin(t)\cdot\cos(t)$$

und $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

(a) Zeichnen Sie die Kurve in das vorgegebene Koordinatensystem mittels der angegebenen Wertetabelle.

(/2)

t	$x(t)$	$y(t)$
0	0	0
$\frac{\pi}{8}$	0,38	0,35
$\frac{\pi}{4}$	0,71	0,50
$\frac{3\pi}{8}$	0,92	0,35
$\frac{\pi}{2}$	1,00	0



(b) Bestimmen Sie die t-Werte und die Koordinaten der Punkte mit vertikaler bzw. horizintaler Tangente. Zeichnen Sie zu diesen Punkten die Tangenten in das Koordinatensystem ein.

(/6)

horizontale Tangenten:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0 \iff \dot{y} = 0 \land \dot{x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$$

$$\dot{x} = \cos(t)$$

$$\Rightarrow \dot{y} = 0 \iff 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow P(0{,}71 / 0{,}50)$$

vertikale Tangenten:

$$x' = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = 0 \iff \dot{x} = 0 \land \dot{y} \neq 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = 0 = \cos(t) \iff t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow P(1/0)$$

(c) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve α und der x-Achse.

(/3)

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot \dot{x} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos^2(t) \, dt$$

$$= \left[-\frac{\cos^3(t)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

(d) Erläutern Sie in einem Satz, wie sich die Kurve für $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ fortsetzt.

(/1)

Die Kurve wird an der x-Achse gespiegelt fortgesetzt.

3. **Aufgabe: Anwendung Funktionen mehrerer Veränderlicher (/max. 7 Punkte)**

Es ist folgende Tabelle mit Messwerten gegeben

Messung	x_i	y_i
1	0	1
2	0,5	2
3	1	3
4	1,5	5

Geben Sie die Gleichung der Geraden an, welche die Messwerte am besten annähert. Verwenden Sie dazu die aus der Methode der kleinsten Quadrate bekannten Formeln.

$$\sum_i x_i = 3 \qquad \sum_i y_i = 11 \qquad \sum_i x_i^2 = \frac{14}{4} = 3{,}5$$

$$\sum_i x_i y_i = 11{,}5 \qquad n = 4$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} \underline{\underline{a}} & \underline{\underline{b}} & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3{,}5 & 3 & 11{,}5 \\ 3 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{11{,}5 \cdot 4 - 11 \cdot 3}{3{,}5 \cdot 4 - 3^2} = \frac{46 - 33}{14 - 9} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

$$b = \frac{3{,}5 \cdot 11 - 11{,}5 \cdot 3}{5} = \frac{38{,}5 - 34{,}5}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\Rightarrow y = a \cdot x + b$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = 2{,}6x + 0{,}8}}$$

4. **Aufgabe: Vektorfelder und Kurvenintegrale** (/max. 14 Punkte)
Mit festem $a, b \in \mathbb{R}$ sei im $\mathbb{R}^2$ das folgende Vektorfeld gegeben:

$$\vec{v}(x, y) = \left(bxy - ax + 6, x^2 + ax + b\right)^T = \begin{pmatrix} bxy - ax + 6 \\ x^2 + ax + b \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Werte von a und b ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld? Geben Sie für diese Werte von a und b die Potentiale an.

(/7)

$\left(D = \mathbb{R}^2 \text{ einf. zshg.} \Rightarrow \text{Int.-Bed. muss erfüllt sein damit } \vec{v} = \text{grad}_f \right)$

$\Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial y} = bx = \frac{\partial v_2}{\partial x} = 2x + a$

$\Leftrightarrow b = 2 \wedge a = 0$ aus Koeffizientenvergleich

$\Rightarrow$ Potentiale für $\vec{v}(x;y) = (2xy + 6, x^2 + 2)^T$

$\Rightarrow f(x,y) = \int (2xy + 6)\, dx = x^2 y + 6x + g(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 + 2$

$\Leftrightarrow g'(y) = 2$

$\Rightarrow g(y) = \int 2\, dy = 2y + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Potentiale:

$$\underline{\underline{f(x,y) = x^2 y + 6x + 2y + c}}$$

(b) Es seien nun $a = 0$ und $b = 1$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \vec{v}\, d\vec{r}$$

über die Kurve C, mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (\cos(t)\,,\,\sin(t))^T = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

durch $\vec{v}$ für $t \in [0; 2\pi]$.

(/6)

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ mit $a=0, b=1$ ist kein Gradientenfeld.

$\Rightarrow \vec{v}(x,y) = (xy+6\,,\, x^2+1)^T \quad , \quad \vec{r}\,'(t) = (-\sin(t)\,,\, \cos(t))^T$

$$\Rightarrow I := \int_C \vec{v}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left\langle (xy+6\,,\, x^2+1)^T \Big|_{(\cos(t),\,\sin(t))} ; (-\sin(t), \cos(t))^T \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle (\cos(t)\sin(t)+6\,,\, \cos^2(t)+1)^T ; (-\sin(t), \cos(t))^T \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\cos(t)\sin^2(t) - 6\sin(t) + \cos^3(t) + \cos(t)\right) dt$$

$$= \left[-\frac{\sin^3(t)}{3} + 6\cos(t) + \sin(t) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^3(t)\, dt$$

$$= 0 + \left[\sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Rechenseite für Aufgabe 4b

Bem.: Der Weg C ist geschlossen.

(c) Welche Aussage kann man aufgrund dieses Ergebnisses über das Vektorfeld $\vec{v}$, mit $a = 0$ und $b = 1$ machen?

(/1)

Das Verschwinden des Ringintegrals alleine liefert keine Aussage bzgl. des Vektorfeldes $\vec{v}$. ✓

5. **Aufgabe: Differentialgleichungen** (/max. 17 Punkte)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}$$

(a) Geben Sie für das homogene Problem

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

eine allgemeine Lösung an.

(/4)

CG: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ ✓

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2} = -2 \pm j$ ✓

$\Rightarrow \underline{\underline{y_H(x) = c_1 \cdot e^{-2x} \cos(x) + c_2 \cdot e^{-2x} \sin(x)}}$ ✓ ✓

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}$$

mittels einer speziellen Ansatzfunktion.

(/ 6)

Ansatz: $y_I(x) = A \cdot e^{-2x}$ ✓ $(-2 \neq -2 \pm j)$

$y_I'(x) = -2A \cdot e^{-2x}$ ✓

$y_I''(x) = 4A \cdot e^{-2x}$ ✓

⇒ einsetzen:

$$4A \cdot e^{-2x} + 4 \cdot (-2) \cdot A \cdot e^{-2x} + 5A \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \quad \Big| \cdot e^{2x}$$

$$4A - 8A + 5A = 1$$

$$\underline{\underline{A = 1}}$$ ✓

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_I(x) = e^{-2x}}}$$ ✓

⇒ allg. Lsg.:

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} \cos(x) + C_2 \cdot e^{-2x} \sin(x) + e^{-2x}}}$$ ✓ ✓ ✓

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,.$$

(/7)

allg. Lsg.:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-2x}\cos(x) + C_2 \cdot e^{-2x}\sin(x) + e^{-2x}$$

$$y'(x) = -2C_1 \cdot e^{-2x}\cos(x) - C_1 \cdot e^{-2x}\sin(x)$$
$$-2C_2 \cdot e^{-2x}\sin(x) + C_2 \cdot e^{-2x}\cos(x) - 2 \cdot e^{-2x}$$

$\Rightarrow$ $y(0) = C_1 + 1 = 0$: I $\Rightarrow$ $\underline{\underline{C_1 = -1}}$

$y'(0) = -2C_1 + C_2 - 2 = 0$: II

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{C_1 \text{ in II}}}$ $\quad 2 + C_2 - 2 = 0 \iff \underline{\underline{C_2 = 0}}$

$\Rightarrow$ spez. Lsg. mit $y(0) = 0$ & $y'(0) = 0$

$$y(x) = -e^{-2x}\cos(x) + e^{-2x}$$
$$= \underline{\underline{(1-\cos(x)) \cdot e^{-2x}}}$$