Lineare Algebra Übungsblatt 5: Diagonalisierung

1. Sind die folgende Matrizen diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie die Matrix P an, die die jeweilige Matrix diagonalisiert. Geben Sie außerdem die Diagonalmatrix $P^{-1}AP$ an.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix, die die Matrix $E - \vec{v}\vec{v}^T$ (E Einheitsmatrix, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) diagonalisiert.

3. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie jetzt A^7.
   Tipp: Verwenden Sie $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$

Lineare Algebra Übungsblatt 5: Lösungen

1. (a) A ist diagonalisierbar. $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

   (b) A ist nicht diagonalisierbar, da der doppelte Eigenwert $\lambda = 2$ nur einen zugehörigen Eigenvektor hat.

   (c) $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $E - \vec{v}\vec{v}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. $\lambda_1 = 0$, $\vec{x}_{ev1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,

   $\lambda_2 = 2$, $\vec{x}_{ev2} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

   $A^7 = \begin{pmatrix} 64 & -64 \\ -64 & 64 \end{pmatrix}$