Lineare Algebra Übungsblatt 4: Lineare Gleichungssysteme + Eigenvektoren

1. Gegeben sind die folgenden Gleichungssysteme.

   (a) Bestimmen Sie zuerst, ohne das Gleichungssystem zu berechnen, wieviele Lösungen es hat (eine, keine, unendlich viele).

   (b) Berechnen Sie mit dem Gaussschen Algorithmus die Lösungen der Gleichungssysteme. (Falls sich die Lösung aus (a) ergibt, geben Sie sie direkt an.)

   i. $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ 9x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

   ii. $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

   iii. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   iv. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Durch die Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

wird die Drehung eines x, y-Koordinatensystems um den Winkel φ um den Nullpunkt in der Ebene beschrieben (s. Beispiel aus der Vorlesung). Für welche Drehwinkel φ ergeben sich reelle Eigenwerte? Wie lauten die zugehörigen Eigenvektoren?

Lineare Algebra Übungsblatt 4: Lösungen

1. Gegeben sind die folgenden Gleichungssysteme.
   (a) i. $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c) = 3 \implies$ eine Lösung
       ii. $\mathrm{Rg}(A) \neq \mathrm{Rg}(A|c) \implies$ keine Lösung
       iii. $\det(A) = 4 \implies$ eine Lösung
       iv. $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c) = 2 < 3 \implies$ unendlich viele Lösungen
   (b) i. $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -2$
       ii. keine Lösung
       iii. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$
       iv. $x_1 = 3 - 2\lambda, x_2 = \lambda, x_3 = \lambda$
2. Eigenwerte: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$ (einfache Eigenwerte)
   Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2 : \vec{x_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3 : \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
   Eigenvektor zu $\lambda_3 = -2 : \vec{x_3} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\varphi_1 = 0^o$ (keine Drehung), $\varphi_2 = 180^o$
   $\varphi_1 = 0^o \implies$ doppelter Eigenwert $\lambda_1 = 1$, alle Vektoren sind Eigenvektoren
   $\varphi_2 = 180^o \implies$ doppelter Eigenwert $\lambda_2 = -1$, alle Vektoren sind Eigenvektoren