Lineare Algebra Übungsblatt 6: Koordinatentransformation, Wiederholung Gleichungssysteme

1. Ein Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 (x,y,z) wird zuerst um die x_1-Achse um 45^o gedreht. Es entsteht das Koordinatensystem x_1^*, x_2^*, x_3^*. Danach wird x_1^*, x_2^*, x_3^* umd die x_3^*-Achse um 30^o gedreht, es entsteht das Koordinatensystem x_1', x_2', x_3'.

   (a) Wie lautet die Transformationsmatrix, die Vektoren aus dem KS x_1, x_2, x_3 direkt nach x_1', x_2', x_3' überführt?

   (b) Gegeben sei der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ im Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 . Wie lauten seine Koordinaten im Koordinatensystem x_1', x_2', x_3'?

   (c) Gegeben sei der Vektor $\vec{c^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ im Koordinatensystem x_1^*, x_2^*, x_3^*.

      i. Wie lauten seine Koordinaten im Koordinatensystem x_1', x_2', x_3'?

      ii. Wie lauten seine Koordinaten im Koordinatensystem x_1, x_2, x_3?

2. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -5 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \end{array}$$

3. Gegeben sei das folgende von $a, b \in I\!R$ abhängige Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & ax_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & & & = & -1 \\ & & 2x_2 & - & 6x_3 & = & 14b \end{array}$$

   (a) Für welche(s) $a, b \in I\!R$ besitzt das Gleichungssystem

      i. genau eine

      ii. keine

      iii. unendlich viele Lösungen?

   (b) Lösen Sie falls möglich das Gleichungssystem für

      i. $a = 5,\ b = 0$

      ii. $a = -2,\ b = 1$

Lineare Algebra Übungsblatt 6: Lösungen

1. (a) $Q = Q_3(30^o) \cdot Q_1(45^o) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{b'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

   (c) i. $\vec{c'} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

   ii. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. (a) i. für $a \neq -2$ genau eine Lösung

   ii. für $a = -2$ **und** $b \neq 1$ keine Lösung

   iii. für $a = -2$ **und** $b = 1$ unendlich viele Lösungen

   (b) i. $x_1 = \frac{2}{9}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{1}{9}$

   ii. $x_1 = -12 - 5\lambda, x_2 = 7 + 3\lambda, x_3 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$