Lineare Algebra Übungsblatt 2: Vektor- und Matrizenrechung

1. Prüfen Sie, ob die Vektoren linear abhängig sind. Falls ja, geben Sie die Art der linearen Abhängigkeit an.

   (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$

   (c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind die Punkte $A(0,-1,0)$, $B(5,1,0)$, $C(0,4,0)$ und $D(3,1,4)$.

   (a) Geben Sie die Vektoren $\vec{a} = \vec{DA}$, $\vec{b} = \vec{DB}$, $\vec{c} = \vec{DC}$ in Koordinatendarstellung an.

   (b) Bestimmen Sie die Komponentendarstellung des Vektors $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bezüglich der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

3. Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $A - 2B$, $A \cdot B$, $A \cdot B^T$ und $A^T \cdot B$.

4. Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot B^T$ und $A^T \cdot B$.

5. Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie falls möglich die folgenden Summen, Produkte oder Inversionen. Begründen Sie ansonsten, warum die Operation nicht möglich ist.

   (a) $A \cdot B$
   (b) $A \cdot C$
   (c) $B^T \cdot C$
   (d) $C \cdot B$
   (e) $A + B$
   (f) $A + C \cdot B$
   (g) B^{-1}

(h) A^{-1}

Lineare Algebra Übungsblatt 2: Lösungen

1. (a) linear abhängig:
   mit $\lambda_3 = \lambda$ frei wählbar: $\frac{2}{5}\lambda\vec{a} - \frac{3}{5}\lambda\vec{b} + \lambda\vec{c} = 0$

   (b) linear unabhängig

   (c) linear abhängig:
   mit λ_3 und λ_4 frei wählbar: $(-\lambda_3 + \lambda_4)\vec{a} + (2\lambda_3 - \lambda_4)\vec{b} + \lambda_3\vec{c} + \lambda_4\vec{d} = 0$

2. (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$,

   (b) $\vec{d} = -\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{c}$.

3. $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -1 & 9 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,
   $A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 5 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. (a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

   (b) $A \cdot C$: nicht möglich, da Spaltenanzahl A (3) $\neq$ Zeilenanzahl C (2)

   (c) $B^T \cdot C$: nicht möglich, da Spaltenanzahl B^T (3) $\neq$ Zeilenanzahl C (2)

   (d) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

   (e) $A + B$: nicht möglich, da A und B unterschiedliches Formet haben.

   (f) $A + C \cdot B$: nicht möglich, da A und $C \cdot B$ unterschiedliches Formet haben.

   (g) B^{-1}: nicht möglich, da B nicht quadratisch ist.

   (h) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$