Fakultät für Maschinenbau,
Fahrzeugtechnik, Flugzeugtechnik

HOCHSCHULE
FÜR ANGEWANDTE
WISSENSCHAFTEN
MÜNCHEN

Skript zur Vorlesung

Lineare Algebra

Prof. Dr.-Ing. Katina Warendorf

2. Oktober 2014

erstellt von Sindy Engel erweitert von Prof. Dr.-Ing. Katina Warendorf

Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren

1.1 Grundbegriffe

Definition: Vektor

Vektoren sind Größen, die durch Angabe von ihrer Maßzahl (Betrag) und ihrer Richtung vollständig beschrieben sind.

Beispiele für Vektoren: $\vec{F}$, $\vec{s}$, $\vec{M}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$
Beispiele für Skalare: W, ρ, t, m, T

Spezielle Vektoren:

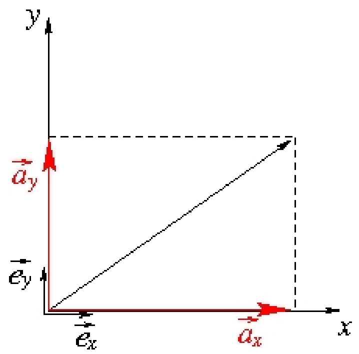
Nullvektor: $\vec{0}$ mit $\left|\vec{0}\right| = 0$

Einheitsvektor: $\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$

Ortsvektor: $\vec{p} = \vec{OP}$

1.2 Darstellung im Koordinatensystem

Komponentendarstellung

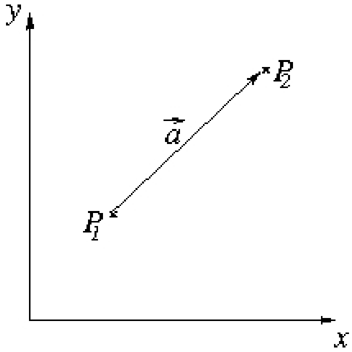


$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ &= a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \end{aligned}$$

Koordinatendarstellung

a_x, a_y, a_z heißen Koordinaten von $\vec{a}$. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Berechnung des Vektors aus zwei Punkten



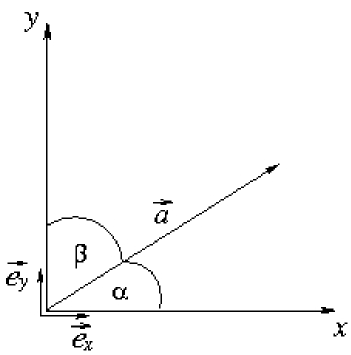
mit: $P_1\,(x_1, y_1, z_1)\,, P_2\,(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned}$$

Winkeldarstellung



$$\begin{aligned} \alpha &= \angle\,(\vec{e}_x; \vec{a}) \\ \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \beta &= \angle\,(\vec{e}_y; \vec{a}) \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \gamma &= \angle\,(\vec{e}_z; \vec{a}) \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \\ \vec{a} &= |\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

α, β, γ heißen Richtungswinkel.

Folgender Zusammenhang gilt:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1.$$

1.3 Rechenoperationen mit Vektoren

1.3.1 Skalarprodukt

Operationszeichen definiert als: $\circ$

Definition: **Skalarprodukt**

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ist das Produkt aus den Beträgen von $\vec{a}, \vec{b}$ und dem cos *des eingeschlossenen Winkels φ.*

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos \varphi$$

- Zur Berechnung der Winkel zwischen Vektoren
- $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ Bedingung für Rechtwinkligkeit

Gesetze:

- *Kommutativgesetz:* $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- *Assoziativgesetz:* $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (\lambda\vec{b})$, *mit* $\lambda \in \mathbb{R}$
- *Distributivgesetz:* $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Berechnung aus den Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \end{aligned}$$

1.3.2 Vektorprodukt

Operationszeichen definiert als: $\times$

Definition: **Vektorprodukt**

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren des Raumes ist ein Vektor $\vec{v}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ *steht senkrecht auf $\vec{a}, \vec{b}$.*

- $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{v}\right)$ *bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.*
- $|\vec{v}| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\angle\vec{a};\vec{b}\right)$ *(Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms)*

Gesetze:

- *Alternativgesetz:* $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$
- *Assoziativgesetz:* $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$, *mit* $\lambda\in\mathbb{R}$
- *Distributivgesetz:* $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

Berechnung aus Koordinaten

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_y\cdot b_z & - & a_z\cdot b_y \\ a_z\cdot b_x & - & a_x\cdot b_z \\ a_x\cdot b_y & - & a_y\cdot b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Merkregel:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{matrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{matrix}$$

1.4 Vektorraum

<u>Definition:</u> Vektorraum

Die Menge $\mathbb{V}^n = \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \right\}; a_k \in \mathbb{V}$ *heißt n-dimensionaler Vektorraum, falls für alle* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *stets* $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{V}^n$ *mit* $\lambda\vec{a} \in \mathbb{V}^n$ *ist und folgende Gesetze gelten:*

---

1. Kommutativgesetz

   $$\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$$

2. Assoziativgesetz

   $$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$$

3. Es existiert $\vec{0}$

   $$\vec{0} \in \mathbb{V}^n, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

4. Es existiert der Gegenvektor

   $$\vec{a} \in \mathbb{V}^n, -\vec{a} \in \mathbb{V}^n \to \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

5. Distributivgesetz

   $$\lambda\left(\mu\vec{a}\right) = \left(\lambda\mu\right)\vec{a}$$

6. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
7. $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
8. $\left(\lambda + \mu\right)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

1.5 Der Basisbegriff

Definition: Linearkombination

Ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{V}^n$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_m}$, wenn

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \cdots + \lambda_m \vec{a_m}\,, \text{ mit } \lambda_1 \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}$$

Definition: Lineare Abhängigkeit/ Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a_1} \ldots \vec{a_m}$ heißen linear unabhängig, wenn

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \cdots + \lambda_m \vec{a_m}$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ erfüllt wird.
Ist mindestens ein $\lambda \neq 0$ heißen sie linear abhängig.

Ferner gilt: Im n-dimensionalen Vektorraum existieren maximal n linear unabhängige Vektoren.

Definition: Basis

n linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{V}^n$ heißen Basis von $\mathbb{V}^n$.

Satz:

Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ eine Basis des $\mathbb{V}^n$, dann hat der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{V}^n$ bezüglich dieser Basis eine eindeutige Darstellung der Form:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n$$

2 Matrizen

2.1 Einführung

<u>Definition:</u> Matrix

Unter einer Matrix vom Typ (m, n) versteht man ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ik} *: Matrixelement,*
i *- Zeilenindex,* k *- Spaltenindex*

<u>Definition:</u> Transponierte einer Matrix

Werden in einer Matrix A Zeilen und Spalten vertauscht, so erhält man die Transponierte der Matrix A, A^T.

<u>Definition:</u> Quadratische Matrix

Gestalt: Zeilenzahl = Spaltenzahl

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale
Nebendiagonale

Definition: Diagonalmatrix

Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen zu 0 werden.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Stehen in einer Diagonalmatrix auf der Hauptdiagonalen nur 1 so handelt es sich um die Einheitsmatrix.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jede Spalte der Einheitsmatrix ist ein Einheitsvektor

Definition: Dreiecksmatrix

Eine quadratische Matrix (m, m) heißt Dreiecksmatrix, wenn die Elemente ober- oder unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind.

Definition: Symmetrische Matrix

Eine quadratische Matrix A (m, m) heißt symmetrisch, wenn $a_{ik} = a_{ki}$ *für* $i \neq k = 1 \ldots m$ *ist. Das entspricht einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen.*

2.2 Rechenoperationen

2.2.1 Addition und Subtraktion

Definition: Addition und Subtraktion

2 Matrizen $A = (a_{ik})$ *und* $B = (b_{ik})$ *vom gleichen Typ, werden addiert/subtrahiert, indem die entsprechenden Elemente (gleiche Indizes) addiert/subtrahiert werden.*

$$C = A \pm B = (a_{ik} \pm b_{ik})$$

<u>Gesetze:</u>

- *Kommutativgesetz:* $A + B = B + A$.
- *Assoziativgesetz:* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2.2.2 Multiplikation mit einem Skalar

<u>Definition:</u> Multiplikation mit einem Skalar

Eine Matrix A wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit λ multipliziert wird.

<u>Gesetze:</u>

- *Assoziativgesetz:* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- *Distributivgesetze:* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ *und* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

2.2.3 Multiplikation von Matrizen

Multiplikation von 2 Matrizen ist nur möglich, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt!

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{4} & \boxed{7} & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{6} & \boxed{13} & \boxed{5} \\ \boxed{23} & \boxed{44} & \boxed{11} \\ \boxed{4} & \boxed{12} & \boxed{8} \end{pmatrix}$$

Eine Zeile von A wird elementweise mit einer Spalte von B multipliziert.

Durch Addition der Produkte erhält man die Elemente der Ergebnis-Matrix.

Hierbei liefert der jeweilige Zeilenindex von A den Zeilenindex des Ergebniselementes, während der Spaltenindex von B den zugehörigen Spaltenindex des Ergebniselementes liefert.
Beispiel:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

bzw.:

$$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23}$$

Zusammenhang der Matrixtypen:

	A	$\cdot$	B	$=$	C
Typ:	(n,p)		(p,m)		(n,m)

Falk-Schema

Zur Vereinfachung der Rechnung dient das FALK-Schema. Hierbei werden die Elemente der Matrizen wie folgt in einer Tabelle angeordnet.

		1	3	2
		4	7	1
2	1	6	13	5
3	5	23	44	11
4	0	4	12	8

Gesetze:

- *Assoziativgesetz*

  $$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

- *Distributivgesetz*

  $$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

  $$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

- *Ferner*

  $$A \cdot E = E \cdot A = A$$

  $$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

  E ist die Einheitsmatrix, mit den zugehörigen Einheitsvektoren

- *Das Kommutativgesetz gilt im Allgemeinen nicht!*

  $$A \cdot B \neq B \cdot A$$

3 Determinanten

Determinanten existieren nur für quadratische Matrizen.

Anwendungen:

- das Spatprodukt
- Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme bzw. Aussagen zu linearer Abhängigkeit /Unabhängigkeit von Vektoren

3.1 Zweireihige Determinanten

Unter der Determinante einer zweireihigen Matrix versteht man folgende Zahl:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + \, a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Das Produkt aus den Elementen der Hauptdiagonale wird addiert, das Produkt der Elemente der Nebendiagonalen wird subtrahiert.

3.2 Dreireihige Determinanten

$$D = \det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

multiplizieren und addieren: $\searrow$
multiplizieren und subtrahieren: $\swarrow$

$$= +a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

3.3 Eigenschaften von Determinanten

1. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man in ihr die Zeilen mit den Spalten vertauscht und umgekehrt. (Deshalb gelten alle folgenden Eigenschaften, die sich auf Zeilen beziehen analog für Spalten.)
2. Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen (Spalten) vertauscht und die übrigen Zeilen (Spalten) fest lässt.
3. Multiplikation mit einem Skalar λ:
   a) Eine Determinante wird mit einem Faktor λ multipliziert, indem alle Elemente einer Zeile (Spalte) mit λ multipliziert werden.
   b) Ein Faktor λ, der allen Elementen irgendeiner Zeile (Spalte) gemeinsam ist, kann vor die Determinante gezogen werden.
   c) Werden die Elemente einer beliebigen Zeile (Spalte) mit einem Faktor λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.
4. Eine Determinante hat den Wert Null, wenn
   a) alle Elemente einer Zeile (Spalte) gleich Null sind.
   b) zwei Zeilen (Spalten) gleich sind.
   c) zwei Zeilen (Spalten) zueinander proportional sind.
   d) eine Zeile (Spalte) als Linearkombination der übrigen darstellbar ist.
5. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu einer beliebigen Zeile (Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) oder eine Linearkombination von mehreren Zeilen (Spalten) addiert.
6. Für zwei n-reihige quadratische Matrizen gilt stets
   $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
7. Die Determinante einer n-reihigen Dreiecksmatrix besitzt den Wert $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

3.4 Determinanten höherer Ordnung

<u>**Definition:**</u>
Entwicklungsformel für Determinanten höherer Ordnung

Der Wert einer (n, n) Determinanten $D = \det(A)$ wird rekursiv nach folgender Entwicklungsformel berechnet:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

mit:

$$A_{1k} = (-1)^{1+k} \cdot D_{1k}$$

D_{1k}*: $(n-1, n-1)$-Unterdeterminante von D.* D_{1k} *entsteht durch Streichen der 1. Zeile und k-te Spalte von D.*

3.5 Laplace'scher Entwicklungssatz

Definition: Laplace'scher Entwicklungssatz

Eine (n,n)-Determinante lässt sich nach jeder beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln.

Nach i-ter Zeile:

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{1n}$$

Nach k-ter Spalte:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk}$$

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$$

D_{ik}: (n-1,n-1)-Unterdeterminante von D ergibt sich durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte von D.

4 Ergänzungen zu Matrizen und Determinanten

Definition: **Reguläre Matrix**

Eine (n,n)-Matrix heißt regulär, wenn $\det A \neq 0$. *Andernfalls heißt sie singulär.*

Definition: **Inverse Matrix**

Gibt es zu einer (n,n)-Matrix A eine zweite (n,n)-Matrix mit folgender Eigenschaft

$$A \cdot X = X \cdot A = E$$

so heißt X die zu A inverse Matrix und wird A^{-1} *bezeichnet.*

Definition: **Orthogonale Matrix**

Eine (n,n)-Matrix A heißt orthogonal falls

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = E$$

Eigenschaften einer orthogonalen Matrix:

1. Zeilen- bzw. Spaltenvektoren bilden ein orthonormiertes System. ($\Leftrightarrow$ A ist orthogonal)
2. $\det A = 1$ oder -1
3. $A^T = A^{-1}$
4. Das Produkt orthogonaler Matrizen ist wieder orthogonal.

4.1 Rang einer Matrix

Definition:
Unterdeterminante einer nicht-quadratischen Matrix

Werden in einer (n,m)-Matrix A $n - p$ Zeilen und $m - p$ Spalten gestrichen, so heißt die Determinante der (p;p)-Restmatrix Unterdeterminante p-ter Ordnung von A.

Definition: Rang einer Matrix

Unter dem Rang einer Matrix wird die höchste Ordnung r aller von 0 verschiedenen Unterdeterminante verstanden.

4.1.1 Rangbestimmung durch elementare Umformungen

Folgende Aktionen haben keinen Einfluss auf den Rang einer Matrix:

- Vertauschung von 2 Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
- Zeilen addieren und subtrahieren

Die o.g. Mittel können genutzt werden, um die Matrix zu vereinfachen, um so die Rangbestimmung zu erleichtern. Hierbei wird eine Dreiecks- oder Trapezform angestrebt bzw. möglichst viele Nullzeilen und -spalten. Der Rang von A ist dann die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
b_{11} & b_{11} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\
0 & b_{21} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right) \Longrightarrow RgA = r$$

5 Lineare Gleichungssysteme

<u>Definition:</u> **Lineares Gleichungssysteme**

Ein System von m Gleichungen und n Unbekannten der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

a_{ij},$c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$
heißt ***Lineares Gleichungssystem (LGS)*** *vom Typ (m,n).*

5.1 Darstellung linearer Gleichungssysteme mittels Matrizen

Ein LGS mit m Gleichungen und n Unbekannte vom Typ

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

lässt sich mit Matrizen wie folgt darstellen

$$A \cdot \vec{x} = \vec{c}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

bzw.

$$(A|c) = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)}_{\text{erweiterte Koeffizientenmatrix}}$$

5.2 Lösen eines LGS

Strategie:

Das LGS wird durch zulässige Umformungen in ein äquivalentes LGS überführt, d.h. die Lösungsmenge des LGS ändert sich nicht.

Zulässige Umformungen:

- Vertauschung von 2 Gleichungen
- Multiplikation einer Gleichung mit $\lambda \neq 0$
- Addition/Subtraktion einer Gleichung zu einer anderen

Gegeben: LGS mit m Gleichungen und n Unbekannten vom Typ

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m1}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

Gauss-Verfahren

Durch zulässige Umformungen wird eine Zeilenstufenform erzeugt, d.h. unterhalb der Diagonalen stehen Nullen. Durch Rückwärtselimination werden dann die Unbekannten berechnet.
Falls $m = n$ (quadratisches System) ergibt sich eine obere Dreiecksmatrix:

$$(A|c) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} & d_1 \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} & d_n \end{array}\right)$$

Berechnung der Unbekannten durch Rückwärtselimination:

1. Auflösen der letzten Gleichung: $x_n = \frac{1}{r_{nn}} d_n$
2. Einsetzen in die vorletzte Gleichung und Auflösen: $x_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1,n-1}}(d_{n-1} - r_{n-1,n} \cdot x_n)$
3. usw. :

$$x_{n-j} = \frac{1}{r_{n-j,n-j}}(d_{n-j} - \sum_{k=1}^{j} r_{n-j,n-j+k} \cdot x_{n-j+k}), \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, n-1.$$

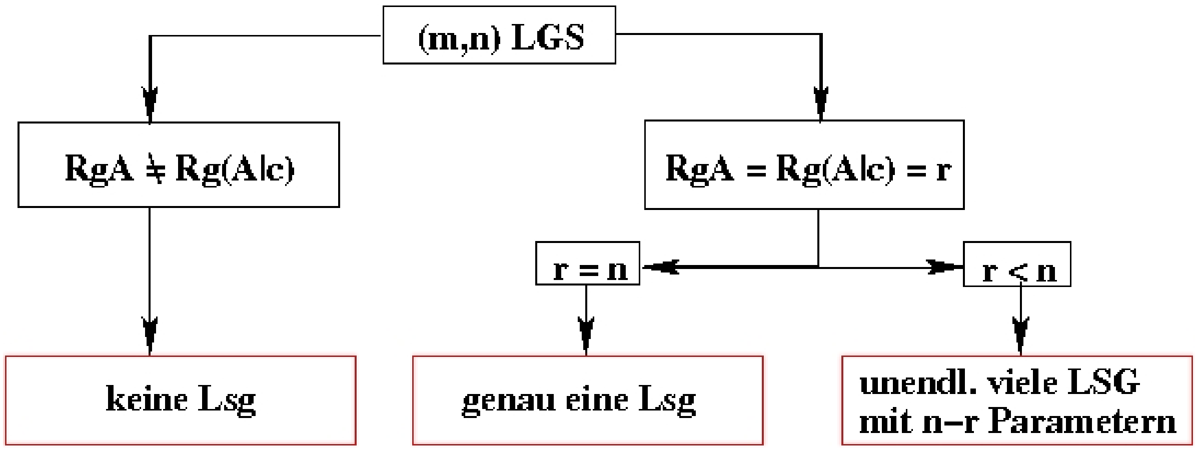


Abbildung 5.1: Schema der Kriterien für die Lösbarkeit eines LGS

5.3 Kriterien für die Lösbarkeit eines LGS

In Abbildung 5.1, auf Seite 21 ist der Zusammenhang zwischen Rang und Lösbarkeit von Linearen Gleichungssystemen schematisch dargestellt.

5.4 Berechnung der inversen Matrix durch Zeilenumformungen

A Sei vom Typ (n,n) und regulär.
Dann erfolgt die Berechnung der Inversen von A (A^{-1}) aus dem Zusammenhang:
$A \cdot A^{-1} = E$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Durch Zeilenumformungen muss nun *links* die Einheitsmatrix erzeugt werden.

$$(E|B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Die *rechts* entstandene Matrix B ist die Inverse zu A.

6 Eigenwerte und Eigenvektoren

6.1 Die Multiplikation von Matrix und Vektor

$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$, *mit* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

A kann eine Drehung und Längenänderung von $\vec{x}$ verursachen.

6.2 Das Eigenwertproblem

Frage: Gibt es einen Vektor $\vec{x}$ zu der Matrix A vom Typ (n,n) der die Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

erfüllt?

Definition: Eigenwert und Eigenvektor

A sei eine quadratische Matrix vom Typ (n,n). Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A und $\vec{x}$ heißt Eigenvektor von A, wenn gilt:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}, \ \vec{x} \neq \vec{0}$$

Die Menge aller Eigenwerte von A, heißt Spektrum von A.
Der Eigenvektor einer Matrix ist nur bis auf den Faktor $c \neq 0$ eindeutig bestimmt

$$\vec{x} \text{ ist } EV \ \rightarrow c \cdot \vec{x} \text{ ist } EV$$

weshalb EV normiert angegeben werden sollte.

Berechnung der Eigenwerte
Umformung:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \lambda \cdot \vec{x}, \ \vec{x} = \vec{E}\vec{x} \\ A \cdot \vec{x} &= \lambda \cdot \vec{E}\vec{x} \\ A \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{E}\vec{x} &= \vec{0} \\ \underbrace{\left(A \cdot -\lambda \cdot \vec{E}\right)}_{(n,n)-Matrix} \ \vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Der hergeleitete Ausdruck stellt ein homogenes, lineares Gleichungssystem dar. Gesucht sind nun die Lösungen dieses Gleichungssystems, da $\vec{x} \neq \vec{0} \Longrightarrow Rg(A-\lambda E) < n$ muss gelten:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Dieser Ausdruck wird als Eigengleichung oder charakteristische Gleichung von A bezeichnet. Für die Berechnung der Eigenwerte müssen also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E)$ berechnet werden.

Berechnung der Eigenvektoren
Lösen des LGS für jeden Eigenwert λ_i einzeln

$$(A - \lambda_i E) \cdot \vec{x} = 0$$

Anmerkung: Hat ein EW die Vielfachheit m, so hat er maximal m zugehörige EV.

6.3 Eigenschaften von EW und EV

1. $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
   Die Summe der Hauptdiagonalelemente ist gleich der Summe der EW. Sie heißt **Spur** der Matrix A.

2. $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
   Doppelte Eigenwerte gehen doppelt ein

3. Tritt ein EW k-fach auf, so hat er maximal k EV.

4. Die zu verschiedenen EW gehörenden EV sind stets linear unabhängig.

5. Hat ein EW mehrere EV, so ist auch jede Linearkombination wieder ein EV zu dem EW.
   $\Longrightarrow$ Jede Kombination von EV spannt dieselbe Ebene auf.

6.4 EW und EV von speziellen Matrizen

Diagonal- bzw Dreiecksmatrix

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot (a_{33} - \lambda)$$

$$\boxed{\lambda_1 = a_{11},\ \lambda_2 = a_{22},\ \lambda_3 = a_{33}}$$

Inverse Matrix

Hat A die EW $\lambda_1 \dots \lambda_n$ so hat A^{-1} die EW $\frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_n}$

Symmetrische Matrix

1. Alle EW sind reell.
2. Es gibt genau n linear unabh. EV.
3. Zu jedem einfachen EW gibt es genau einen, zu jedem k-fachen genau k EV.
4. EV, die zu verschiedenen EW gehören, sind orthogonal

Satz:

Ordnet man die normierten orthogonalen EV einer symmetrischen Matrix in einer Matrix P an, so ist P orthogonal. D.h. $P^{-1} = P^T$.

6.5 Diagonalisierung einer Matrix

Definition: Diagonalisierbarkeit

Eine Matrix A heißt diagonalisierbar oder diagonalähnlich, wenn eine invertierbare Matrix P existiert, so dass $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ berechnet werden kann und D eine Diagonalmatrix ist.

Satz:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *A ist diagonalisierbar*
2. *A hat n linear unabh. EV*

$\Longrightarrow$ Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar!

Verfahren zur Bestimmung von P und D

1. Bestimmung der n linear. unabh. normierten EV der (n,n)-Matrix A.
   $\tilde{x}_{E_1} = \vec{P}_1, \dots, \tilde{x}_{E_n} = \vec{P}_n$
2. Bildung der Matrix P aus den Spaltenvektoren $\vec{P}_1 \dots \vec{P}_n$
3. Bildung der Matrix D: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ ist die Diagonalmatrix mit den EW auf der Hauptdiagonalen.

7 Koordinatentransformation - Darstellung eines Vektors im gedrehten KS

Gegeben sei ein fester Vektor $\vec{a}$ im Ausgangskoordinatensystem x_1, x_2, x_3. Wird dieses KS um eine der Achsen gedreht, so ergibt sich ein neues KS x_1^*, x_2^*, x_3^* . Die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$ bezogen auf das KS x_1^*, x_2^*, x_3^* sollen berechnet werden. Diesen Vektor nennen wir $\vec{a}^*$. Mithilfe einer Transformationsmatrix Q ergibt sich:

$$\vec{a}^* = Q\vec{a}$$

Folgende Formeln gelten für Q:
1. Drehung um x_1-Achse:

$$Q_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

2. Drehung um x_2-Achse:

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

3. Drehung um x_3-Achse:

$$Q_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da es sich bei diesen Matrizen um orthogonale Matrizen handelt, gilt $Q_i^{-1} = Q_i^T$. Den Vektor $\vec{a}$ kann man bei gegebenen $\vec{a}^*$ also wie folgt berechnen:

$$\vec{a} = Q_i^{-1}\vec{a}^* = Q_i^T\vec{a}^*$$

Werden mehrere Drehungen des Koordinatensystems hintereinander ausgeführt, so kann man eine Gesamttransformationsmatrix berechnen: Die erste Transformationsmatrix wird aufgestellt, an diese wird von **links** die Zweite multipliziert, an das Ergebnis wird von **links** die Dritte multipliziert usw.

Beispiel:

Ein Koordinatensystem $x_1; x_2; x_3$ wird zuerst um die x_3-Achse um α gedreht. Es entsteht das Koordinatensystem $x_1^*; x_2^*; x_3^*$. Danach wird $x_1^*; x_2^*; x_3^*$ um die x_1^*-Achse um β gedreht, es entsteht das Koordinatensystem $x_1^{'}; x_2^{'}; x_3^{'}$.

Transformationsmatrix: $Q = Q_1(\beta) \cdot Q_3(\alpha)$
Berechnung von $\vec{a}^{\,'}$: $\vec{a}^{\,'} = Q_1(\beta)\vec{a}^* = Q_1(\beta) \cdot Q_3(\alpha)\vec{a} = Q\vec{a}$
$\vec{a}^{\,'}$ ist der Vektor $\vec{a}$ im Koordinatensystem $x_1^{'}; x_2^{'}; x_3^{'}$.
$\vec{a}^*$ ist der Vektor $\vec{a}$ im Koordinatensystem $x_1^*; x_2^*; x_3^*$.

Da das Produkt von orthogonalen Matrizen wieder eine orthogonale Matrix ergibt, gilt auch hier $Q^{-1} = Q^T$.