Numerische Verfahren

1. Kapitel: Fehleranalyse

Prof. Dr.-Ing. K. Warendorf

Hochschule für Angewandte Wissenschaften München
Fakultät 03

WS 13/14

Inhalt

Fehlerarten

- Eingangsfehler (z.B. Messdaten sind fehlerbehaftet)
- Rundungsfehler (begrenzt durch die Maschinengenauigkeit)
- Verfahrensfehler (durch Näherungen oder durch Akkumulation bzw. Auslöschung)
- Fortpflanzung der Eingangsfehler

Relativer und absoluter Fehler

Sei $\tilde{x}$ eine fehlerbehaftete Größe und x der exakte Wert

absoluter Fehler	relativer Fehler
$\Delta x = x - \tilde{x}$	$\epsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x - \tilde{x}}{x}$

Ist $\vec{x}$ ein Vektor so ergibt sich $\|\Delta \vec{x}\| = \|\vec{x} - \vec{\tilde{x}}\|$ und $\|\epsilon_x\| = \frac{\|\vec{x} - \vec{\tilde{x}}\|}{\|\vec{x}\|}$

Einschub: Norm (1)

Norm

Sei V ein Vektorraum über K ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$). Die Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_0^+$ heißt **Norm**, falls folgende Eigenschaften gelten (für alle $a \in K, \vec{x}, \vec{y} \in V$):

1. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2. $\|a \cdot \vec{x}\| = |a| \cdot \|\vec{x}\|$
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Dreiecksungleichung)

Einschub: Norm (2)

Beispiele für Vektornormen

1. Summennorm: $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
2. Euklidische Norm: $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$
3. Maximumsnorm: $\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

Beispiele für Matrixnormen

Sei A eine reelle (n, n)-Matrix

1. Spaltensummennorm: $\|A\|_1 = \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
2. Spektralnorm: $\|A\|_2 = \sqrt{\max_{j=1\ldots n} \lambda_j(A^T A)}$,
   mit $\lambda_j(A^T A)$: Eigenwerte der Matrix $A^T A$
3. Zeilensummennorm: $\|A\|_\infty = \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|$

Kondition (1)

Mit der Kondition wird die Abhängigkeit eines Problems von gestörten Eingangsdaten beschrieben. Die Konditionszahl stellt ein Maß für diese Abhängigkeit dar.
Ein mathematisches Problem heißt **gut konditioniert**, falls relativ kleine Änderungen in den Eingangsdaten($= \epsilon_x$) relativ kleine Änderungen in den Ausgangsdaten ($= \epsilon_y$) hervorrufen; ansonsten heißt es **schlecht konditioniert**.
Es wird zur Berechnung der Ausgangsdaten von einer **exakten** Auswertung der Funktion ($y = f(x)$) ausgegangen.
Also:

Relative Kondition: $\kappa_R = \dfrac{\|\epsilon_y\|}{\|\epsilon_x\|}$

Daraus ergibt sich, dass κ_R angibt, wie stark der relative Eingangsfehler verstärkt wird.

Kondition(2)

Fehlerfortpflanzung(1)

Fehlerfortpflanzungsgesetz

Sei $\tilde{\vec{x}}$ der Vektor der fehlerbehafteten Eingangsgrößen und $\tilde{y} = f(\tilde{\vec{x}}) = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ die fehlerbehaftete Ausgangsgröße

$$\Delta y = \tilde{y} - y = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{x}) \cdot \Delta x_i \quad \text{oder} \quad |\Delta y| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\vec{x})| \cdot |\Delta x_i|$$

$\sigma_i = f_{x_i}(\tilde{\vec{x}})$ ist der Verstärkungsfaktor von Δx_i.

Kondition(3)
Fehlerfortpflanzung (2)

Relativer Fehler

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{x_i}(\vec{x})}{f(\vec{x})} \cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(\vec{x})} \cdot f_{x_i}(x) \cdot \underbrace{\frac{\Delta x_i}{x_i}}_{\text{rel. Fehler:}\epsilon_{x_i}} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \cdot \epsilon_{x_i}$$

$\tau_i = \frac{x_i}{f(\vec{x})} \cdot f_{x_i}(\vec{x})$ ist der Verstärkungsfaktor von ϵ_{x_i}.

Kondition (4)

Berechnung der Kondition

Relative Kondition einer Funktion

wird $\epsilon_x = (\epsilon_{x_1}, \ldots, \epsilon_{x_n})^T$ in der Summennorm und $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)^T$ in der Maximumsnorm gemessen, so ergibt sich

$$|\epsilon_y| = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \leq \kappa_R \cdot \sum_{i=1}^{n} |\epsilon_{x_i}| \quad \text{mit} \quad \kappa_R = \max\{|\tau_1|, \ldots, |\tau_n|\}$$

werden die Normen genau anders herum gewählt, so ergibt sich

$$|\epsilon_y| = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \leq \kappa_R \cdot \max\{|\epsilon_{x_1}|, \ldots, |\epsilon_{x_n}|\} \quad \text{mit} \quad \kappa_R = \sum_{i=1}^{n} |\tau_i|$$

für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ergibt sich insbesondere

$$|\epsilon_y| = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \kappa_R \cdot \epsilon_x \quad \text{mit} \quad \kappa_R = \left|f'(x)\frac{x}{f(x)}\right|$$

Kondition (5)

Berechnung der Kondition

Relative Kondition für eine beliebige Funktion

$$\kappa_R = \frac{\|\vec{f}'(\vec{x})\| \cdot \|\vec{x}\|}{\|\vec{f}(\vec{x})\|}$$

Die Eingangsgröße $\vec{x}$ kann vektoriell sein und die Funktion $\vec{f}$ kann einen Vektor ergeben.

Kondition einer regulären Matrix

Sei A eine reguläre (n, n)-Matrix

$$\mathrm{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

Stabilität eines Algorithmus

Stabilität

Ein Algorithmus heißt **gutartig** oder **stabil**, wenn die durch ihn im Laufe der Rechnung erzeugten Fehler in der Größenordnung des durch die Kondition des Problems bedingten unvermeidbaren Fehlers bleiben. [a]

[a] Zitat aus: Dahmen, Reusken; Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler;
S. 42; Springer