Numerische Verfahren

3. Kapitel: Direktes Lösen linearer Gleichungssysteme

Prof. Dr.-Ing. K. Warendorf, Prof. Dr.-Ing. P. Wolfsteiner

Hochschule für Angewandte Wissenschaften München
Fakultät 03

WS 13/14

Inhalt

Darstellung eines LGS

Lineares Gleichungssystem

Ein LGS mit m Gleichungen und n Unbekannten vom Typ

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m1}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

lässt sich mit Matrizen wie folgt darstellen

$$A \cdot \vec{x} = \vec{c}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{Koeffizientenmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Lösungsverhalten eines LGS

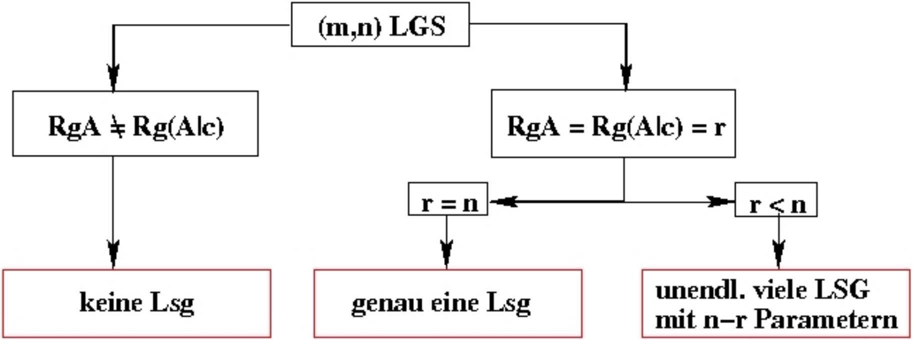


Abbildung : Schema der Kriterien für die Lösbarkeit eines LGS

Rg(A): Rang von A, Rg(A|c): Rang von der A ergänzt um den Vektor c

Gauss-Verfahren

Wir beschränken uns auf quadratische LGS. A ist also vom Typ (n, n).
Ziel ist es das LGS auf eine Dreiecksform zu bringen.

Dreiecksmatrix

$$(A|c) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_n \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} & d_1 \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} & d_n \end{array}\right)$$

Gauss-Elimination:

1. 1. Schritt: (i-te Zeile + $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) \cdot$ 1. Zeile) $\Rightarrow$ 1. Spalte wird bis auf a_{11} zu Null. Folgespalten entsprechend.[1]
2. Berechnung der Unbekannten durch Rückwärtselimination: $x_{n-j} = \frac{1}{r_{n-j,n-j}}(d_{n-j} - \sum_{k=1}^{j} r_{n-j,n-j+k} \cdot x_{n-j+k})$ für $j = 0, \dots, n-1$.

[1]Falls der Nenner Null ist, müssen erst Zeilen mit Hilfe von Pivotelementsuche vertauscht werden

Pivotelementsuche

- "Pivotelement im i-ten Schritt" $a_{ii}^{(i)} = 0$
  $\Rightarrow$ Gauss-Elimination kann für die i-te Spalte nicht durchgeführt werden.
- "Pivotelement im i-ten Schritt"
  $a_{ii}^{(i)} \approx 0$ und andere Matrixeinträge $\gg 0$
  $\Rightarrow$ (Extreme) Rundungsfehler im Ergebnis

Spaltenpivotstrategie

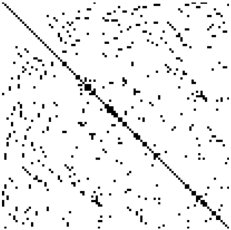
- Wahl des betragsmäßig größtem Element in der i-ten Spalte (i-ter Schritt) als Pivotelement
- Vertauschung der i-ten Zeile mit der Pivotelement-Zeile (ACHTUNG: auch in der rechten Seite vertauschen!)

Direktes Verfahren in Matlab $A\backslash\vec{c}$

Das klassische direkte Verfahren wird in Matlab mit einem Backslash ausgeführt:

$$x = A\backslash c$$

Dahinter verbergen sich verschiedene Algorithmen (auch modifizierte Gauss-Verfahren), die von der Gestalt der Matrix abhängen. Z.B: werden für dünnbesetzte (sparse) oder Band-Matrizen spezielle Verfahren angewendet.
Sparse-Matrix:

$A =$ 

Inverse Matrix

$$A \cdot \vec{x} = \vec{c} \Longrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{c}$$

Nachteil:

- Berechnungsaufwand der Matrix A^{-1} ist deutlich höher als der Aufwand für das Gauss-Verfahren