Numerische Verfahren

Approximation: Ausgleichsrechnung

Prof. Dr.-Ing. K. Warendorf, Prof. Dr.-Ing. P. Wolfsteiner

Hochschule für Angewandte Wissenschaften München
Fakultät 03

WS 13/14

Inhalt

Einleitung

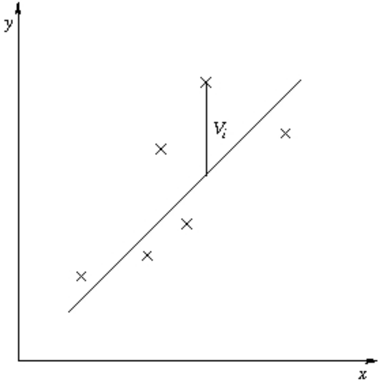
Aufgabe der Ausgleichsrechnung

Gegeben sei eine Wolke von Messdaten. Ziel ist es eine Funktion f zu finden, die sich den Punkten optimal anpasst.

Lösung: Minimierung der Fehlerquadrate

Zuerst wird eine Ansatzfunktion $f(x)$ ausgewählt, die mehrere Parameter enthält. Um diese Parameter optimal zu wählen, wird die Summe der Quadrate der Abstände von $f(x)$ zu den Punkten minimiert (Gauss'sches Prinzip der kleinsten Quadrate).

Minimierung der Fehlerquadrate I



Gegeben: n Messpunkte $P_i(x;\ y)$
Gesucht: Funktion $f(x)$ mit den Parametern $a, b, c, \ldots$, die sich den Messpunkten optimal anpasst.

Bestimmung der Parameter $a, b, c, \ldots$:
Summe aller Abstandsquadrate $\sum_{i=1}^{n} v_i^2$ soll minimiert werden.

$$S(a, b, c \ldots) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

Minimierung der Fehlerquadrate II

Gesuchtes Minimum ergibt sich aus aus:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \ldots$$

Aus diesem (ggf. nichtlinearen) Gleichungssystem wird die Lösung $a, b, c, \ldots$ ermittelt $\Rightarrow$ Ausgleichsfunktion.

Beispiel: Ausgleichsgerade I

$$
\begin{aligned}
f(x) &= y = ax + b \\
v_i &= y_i - ax_i - b \\
S(a;\, b) &= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - ax_i - b) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2b \cdot n = 0
\end{aligned}
$$

Beispiel: Ausgleichsgerade II

Es ergibt sich also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot a \quad + \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot b \quad &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a \quad + \quad n \cdot b \quad &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}$$