Numerische Verfahren

Numerische Integration und Differentiation

Prof. Dr.-Ing. K. Warendorf, Prof. Dr.-Ing. P. Wolfsteiner

Hochschule für Angewandte Wissenschaften München
Fakultät 03

WS 13/14

Inhalt

Inhalt

Einleitung

Ziel

Auswertung von bestimmten Integralen:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- f besitzt keine Stammfunktion
- oder f ist nur durch Stützpunkte gegeben
- oder eine Näherungslösung reicht aus.

Quadraturformel: $Q = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$, $x_k =$ Stützstellen, $\alpha_k =$ Gewichte
Fehler des Verfahrens: $R = \int_a^b f(x)\,dx - Q$.

Zusammengesetzte Newton-Cotes-Formeln I

Einschränkung: Einteilung des Intervalls $[a, b]$ in n *gleich große* Teilintervalle $\Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$
Auf den Teilintervallen wird f stückweise durch Polynome interpoliert.

Trapez-Regel (Verfahren 2. Ordnung)

Polynom 1. Ordnung: Geradenstücke

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right) + R$$

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Matlab-Befehl: **trapz**

Zusammengesetzte Newton-Cotes-Formeln II

Simpson-Regel (Verfahren 4. Ordnung)

Polynom 2. Ordnung: Parabelstücke (gerade Anzahl von Teilintervallen $n = 2m$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + f(b)\right) + R$$

$$|R| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$$

Matlab-Befehl: **quad**

Inhalt

Einleitung

Ziel

Berechnung des Wertes einer Ableitung einer Funktion u an einer Stelle x. In vielen Anwendungen ist es notwendig, Funktionen näherungsweise mit Hilfe eines numerischen Verfahrens zu differenzieren:

- Funktion ist nur indirekt gegeben (zum Beispiel durch einen numerischen Algorithmus)
- es liegen nur Messpunkte vor
- beim Lösen von Differentialgleichungen ist die Funktion, deren Ableitungen gesucht werden, gerade die unbekannte Funktion.

Differenzenformeln

Vorwärtsdifferenzen-Formel

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)$$

Rückwärtsdifferenzen-Formel

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h)$$

Mittelwert beider führt auf ein Verfahren 2. Ordnung:

Zentraler Differenzenquotient

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2)$$