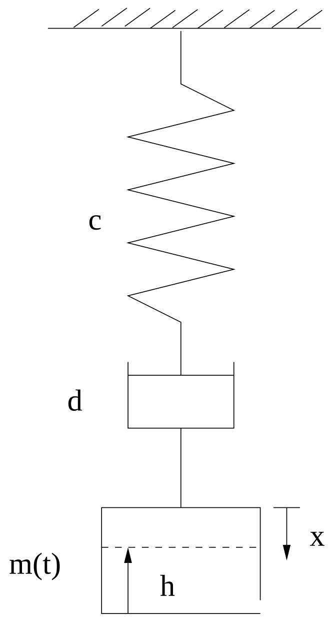
Testat 3: SoSe 14 (Warendorf)

1. **Aufgabe: Differentialgleichung 2. Ordnung**



Der abgebildete Schwinger soll eine variable Masse $m = m(t)$ haben. Die Masse besteht aus einem Gefäß, das mit Wasser gefüllt ist. Dieses Wasser läuft während des Schwingungsvorgangs aus. Die Masse setzt sich zusammen aus der Masse des leeren Gefäßes m_0 und der variablen Wassermasse $m_w(t)$:

$$m(t) = m_0 + m_w(t).$$

ACHTUNG: $m(t)$ kann nicht kleiner werden als die Masse des Gefäßes!
Es gilt folgende Differentialgleichung für das schwingende System:

$$m(t) \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + c \cdot x = m(t) \cdot g$$

x beschreibt dabei die Bewegungen der Masse $m(t)$.
Parameter:
$m_0 = 10\text{kg}$, $d = 4\frac{\text{kg}}{\text{s}}$, $c = 50\frac{\text{N}}{\text{m}}$, $g = 9,81\frac{\text{m}}{s^2}$.

Anfangsbedingungen:
$x(0) = 0\text{m}$, $\dot{x}(0) = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(a) Stellen Sie die Zustandsform für die obige Differentialgleichung auf.
Voraussetzung $m(t)$ ist unabhängig von x (Aufgabenteil (i) und (ii)).

(b) Bestimmen Sie den Verlauf des Weges $x(t)$ und der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$, im Intervall $0 \leq t \leq 100\text{s}$ für die jeweils gegebene Funktion $m_w(t)$ (Einheit: jeweils [kg]). Bearbeiten Sie jeden Aufgabenteil in einem eigenen m-File.
Stellen Sie die Ergebnisse pro Aufgabenteil in einem Plot mit einer Grafik der Funktion $m(t)$, einer Weg-Grafik und einer Geschwindigkeits-Grafik dar (vollständig beschriftet!).

i. leeres Gefäß: $m_w(t) = 0$
ii. die Wassermasse verringert sich mit der Zeit wie folgt: $m_w(t) = 5 - 0.01 \cdot t^2$

iii. Wenn es sich um ein zylindrisches Gefäß handelt, gilt der folgende Zusammenhang (gekoppelte Differentialgleichung):

$$\dot{h} = -\frac{A_1}{A_2} \cdot \sqrt{2(g - \ddot{x}) \cdot h},$$

wobei $A_1 = 0{,}0001\text{m}^2$ die Fläche des Querschnitts der Öffnung und $A_2 = 0{,}02\text{m}^2$ die Fläche des Bodens des Gefäßes ist. h ist die Höhe des Wassers in dem Gefäß.
Die Wassermasse berechnet sich dann wie folgt:

$$m_w = \gamma A_2 h$$

mit $\gamma = 1000 \frac{\text{kg}}{m^3}$ (spezifische Wassermasse).

Anfangsbedingung für h: $h(0) = 0,5\text{m}$.

Plotten Sie zusätzlich noch die Höhe h des Wassers im Gefäß.

Hinweis: Sie müssen eine neue Zustandsvariable für h einführen. In Ihrer Matlab-Funktion haben Sie schon einen Wert für $\ddot{x}$ berechnet. Diesen können Sie zur Berechnung von $\dot{h}$ verwenden! Versuchen Sie nicht, die beiden Differentialgleichungen über Einsetzungsverfahren zu verbinden!

2. **Aufgabe: System von Differentialgleichungen**

Gegeben ist das folgende System von Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} 3\ddot{x}_1 + 5\ddot{x}_2 &= x_1 + \mathrm{e}^t \\ -2\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 &= -x_1 + t + \dot{x}_1 \end{aligned}$$

Lösen Sie das obige System unter den Anfangsbedingungen:

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 1,\ \dot{x}_2(0) = 2.$$

Überprüfen Sie durch eine geeignete Maßnahme, ob Ihre Lösung korrekt sein kann. Plotten Sie x_1 und x_2 in einem vollständig beschrifteten Diagramm.