Analysis I: Übungsblatt 4: Differentialrechnung

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte
   (a) $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$
   (b) $\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan x$

2. Bestimmen Sie die Abmessungen eines offenen Beckens mit quadratischer Grundfläche, das ein Volumen von $32m^3$ hat, wenn für den Anstrich der Wände und des Bodens eine möglichst geringe Materialmenge verbraucht werden soll.

3. Bestimmen sie die Tangenten- und Normalengleichung von
$$f(x) = 4\ln(x^2 - 4x + 3) \text{ in } x_0 = 4.$$

4. Diskutieren Sie (Definitionsbereich, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Wertebereich, Verhalten im Unendlichen, Zeichnung) den Verlauf der folgenden aperiodischen Schwingung
$$f(t) = 4(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}), \quad t \geq 0.$$

5. Gegeben sei die Funktion $f(x) = axe^{\frac{x}{a}}$.
   (a) Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extremwerte und das Verhalten im Unendlichen ($\pm\infty$) in Abhängigkeit des Parameters a.
   (b) Im Nullpunkt sei die Steigung $m = 2$. Bestimmen Sie den Parameter a und zeichnen Sie die Funktion im Intervall [-10;2]. (Falls Sie keinen Wert für a ermitteln konnten, zeichnen Sie die Funktion für $a = 3$.) Verwenden Sie dabei die Ergebnisse von Aufgabenteil (a).

6. Ein Mann befindet sich auf einem Ruderboot vor einer geradlinigen Küste. Der Abstand zum nächsten Küstenpunkt A beträgt 8 km. Der Mann möchte zum Küstenpunkt Z, der genau 10 km von A entfernt liegt. Der Mann rudert mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu einem Küstenpunkt M und läuft anschlieend mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h zum Punkt Z. Welchen Küstenpunkt M muss der Mann ansteuern, um sein Ziel Z in kürzester Zeit zu erreichen?

7. Bestimmen Sie eine angenäherte Lösung der Gleichung
$$\frac{1}{x} = x$$
   mit dem Newton-Verfahren (Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$, berechnen Sie x_1 und x_2). Prüfen Sie zuerst ob das Konvergenzkriterium erfüllt ist.

Analysis I: LÖSUNGEN: Differentialrechnung

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte
   (a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$
   (b) $\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan x = -1$

2. Der Materialverbrauch ist minimal, wenn die Bodenfläche die Abmessung 4m×4m hat und die Höhe 2m beträgt.

3. Tangente: $t(x) = \frac{16}{3}x - \frac{64}{3} + 4\ln 3$
   Normale: $n(x) = -\frac{3}{16}x + \frac{3}{4} + 4\ln 3$

4. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}_0^+$
   Nullstelle: $t_0 = 0$
   Extremwert: relatives Maximum bei $H = (0,549/1,540)$
   Wendepunkt: $W = (1,099/1,185)$
   Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} f(t) = 0$
   Wertebereich: $W =$[0;1,540]

5. Gegeben sei die Funktion $f(x) = axe^{\frac{x}{a}}$.
   (a) Nullstelle: $x_0 = 0$
   Extremwert: relatives Minimum bei $T = (-a/-a^2\mathrm{e}^{-1})$
   Verhalten im Unendlichen:
   $a < 0: \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty; \quad a > 0: \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$
   (b) $a = 2$

6. M ist 6 km von A entfernt.

7. $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{40}{41}$