Analysis II: Übungsblatt Differential- und Integralrechnung für mehrere Veränderliche

1. Zeichnen Sie ein Höhenliniendiagramm für die Funktion $z = x^2 - y^2$. (Linien für z_0: -2, -1, 0, 1, 2).

2. Bilden Sie jeweils die geforderten Ableitungen

   (a) $z = x^4 + \sin(xy) + 2x^3y^2 \quad$: 1. und 2. partielle Ableitungen

   (b) $u = e^{xyz} \quad : u_{xyz} = ?$

   (c) $I_1 = I\,\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \quad$: 1. partielle Ableitung nach R_1 und R_2

3. Die Widerstände $R_1 = 350\Omega$ (Genauigkeit $\pm 2\Omega$) und $R_2 = 100\Omega$ (Genauigkeit $\pm 1\Omega$) sind parallel geschaltet und dann noch mit R_2 in Reihe geschaltet.

   (a) Wie groß ist der Ersatzwiderstand $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_2$?

   (b) Berechnen Sie die Genauigkeit (absoluter Fehler dR und relativer Fehler $\frac{dR}{R}$) des Ersatzwiderstandes mit Hilfe des totalem Differentials.

4. Welche Steigung hat die implizit gegebene Kurve $x^3 - 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ im Punkt P(0,y)?

5. Berechnung von Extremwerten und Sattelpunkten

   (a) Bestimmen Sie die relativen Extremwerte/Sattelpunkte der Funktion $z = xy - 27(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$, $x, y \neq 0$.

   (b) Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion $z = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

6. Doppelintegrale:

   (a) $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \int_{y=1}^{e} \frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{1-x} (2xy - x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   (c) Welchen Wert besitzt das Doppelintegral $I = \iint\limits_{B} \frac{y}{x}\mathrm{d}B$, wenn B ein Achtelkreis mit Radius 1 ist (also $0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$)?

7. Dreifachintegrale:

   (a) $\displaystyle\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{y^2} yz \sin x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   (b) Berechnen Sie die Masse des Körpers B mit folgenden Grenzen: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2 - x - y$. Die Dichtefunktion lautet: $\rho(x, y, z) = x + y$.

8. Gegeben ist die Funktion

$$z = 8 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} \quad \text{mit } 0 \le x \le 2 \text{ und } 0 \le y \le 4$$

   (a) Skizzieren Sie die Fläche im x, y, z-Diagramm (x-Achse nach SW, $l_x = \sqrt{2}$ (= 2 diagonale Kästchen) $l_y = 1$, $l_z = 1$) mithilfe folgender Wertetabelle:

y \ x	0	1	2
0			
2			
4			

   (b) Wie lautet die Schnittkurve mit der (y,z)-Ebene? Um was für eine Kurve handelt es sich?

   (c) Berechnen Sie das Volumen unter dieser Fläche im 1. Oktanten.

   (d) Berstimmen Sie die Tangentialebene im Punkt P=(1;2;6,5).

   (e) Berechnen Sie die Extremwerte.

Analysis II: LÖSUNGEN: Differential- und Integralrechnung für mehrere Veränderliche

1. Höhenliniendiagramm: $z_0 = x^2 - y^2$. Es ergeben sich Hyperbeln (für z_0=0 Geraden).

2. Ableitungen

   (a) $z_x = 4\,x^3 + \cos(xy)\,y + 6\,x^2y^2,\ z_y = \cos(xy)\,x + 4\,x^3y,$
   $z_{xx} = 12\,x^2 - \sin(xy)\,y^2 + 12\,xy^2,\ z_{yy} = -\sin(xy)\,x^2 + 4\,x^3,$
   $z_{xy} = -\sin(xy)\,xy + \cos(xy) + 12\,x^2y$

   (b) $u_{xyz} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$

   (c) $\frac{\partial I_1}{\partial R_1} = -I\frac{R_2}{(R_1+R_2)^2}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial R_2} = I\frac{R_1}{(R_1+R_2)^2}$

3. Totales Differential

   (a) $R = 177,8\Omega$

   (b) $dR = \pm 1,704\Omega,\ \frac{dR}{R} = 0,96\%$

4. P(0;1) $\Longrightarrow$ Steigung=0

5. Berechnung von Extremwerten und Sattelpunkten

   (a) Max=(3,-3,-27)

   (b) Max=$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$, Min=$(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$,

6. Doppelintegrale:

   (a) $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{e} \frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

   (b) $\displaystyle\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{1-x} (2xy - x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 18$

   (c) $\displaystyle I = \iint\limits_B \frac{y}{x}\mathrm{d}B = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 0,17$

7. Dreifachintegrale:

   (a) $\displaystyle\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{1}\int_{z=y}^{y^2} yz\sin x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{24}$

   (b) $\displaystyle m = \iiint\limits_B \rho(x,y,z)\mathrm{d}B = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{2-x-y} (x+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}$

8. Gegeben ist die Funktion

$$z = 8 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} \quad \text{mit } 0 \le x \le 2 \text{ und } 0 \le y \le 4$$

   (a)

y \ x	0	1	2
0	8	7,5	6
2	7	6,5	5
4	4	3,5	2

   (b) $x = 0 \Longrightarrow z = 8 - \frac{y^2}{4}$, nach unten geöffnete gestauchte Parabel mit z-Achsenabschnitt 8.

   (c) V=48

   (d) $x + y + z = 9,5$

   (e) Maximum bei Max (0,0,8)