Fachhochschule München **Fakultät 03 FA** **WS 2011/2012**

Diplomvorprüfung in Mathematik I (Lineare Algebra) – Fahrzeugtechnik

Arbeitszeit: 90 Minuten,
Hilfsmittel: Formelsammlung, Skripten, Bücher, Taschenrechner
Aufgabensteller: Kaltsidou-Kloster, Mahnke, Pöschl , Schwarz-Hemmert, Warendorf
!! WICHTIG: **Alle Rechnungen und Ergebnisse auf diesem Arbeitsblatt eintragen!!**
Das Ergebnis allein zählt nicht. Der Rechenweg muss erkennbar sein!!

Name: **Geb. – Datum** **Punkte: ca(/ 50)**

Vorname: **Stud.- Gruppe** **Korr:**

Raum/Platz-Nr: Aufsicht: Note:

Deckblatt

Aufgabe 1: (Berechnung Determinante und inverse Matrix) ca (/ 10)

Gegeben ist die folgende Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A. **ca (/ 4)**

Entwicklung nach der 2. Zeile:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \quad 1 \quad 1$$

$$= -1 \cdot \{3 \cdot (-2+3)\} - 1 \cdot \{-1 + 0 - 6 - 0 + 4 + 2\} = \quad 1$$

$$= -3 - 1 \cdot (-1) = -3 + 1 = -2 \quad 1$$

(man kann auch nach der 4. Zeile oder nach der 3. Spalte entwickeln bzw. nach jeder Zeile oder Spalte, dann bekommt jede 3x3 Det. 1/2 Pkt)

Fortsetzung Aufgabe 1

b) Berechnen Sie die Inverse von B: B^{-1}. **ca (/6)**

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \det B = -2+3=+1 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} \text{ exist.}$$ 1

1	0	1	1	0	0	$\cdot(-2)$
2	1	3	0	1	0	+
0	-1	0	0	0	1	
1	0	1	1	0	0	
0	1	1	-2	1	0	+ 1
0	-1	0	0	0	1	
1	0	1	1	0	0	+
0	1	1	-2	1	0	+
0	0	1	-2	1	1	$\cdot(-1)$ 1
1	0	0	3	-1	-1	
0	1	0	0	0	-1	$= B^{-1}$
0	0	1	-2	1	1	1

1 1

oder

$\alpha_{11} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix} = +3$; $\alpha_{21} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} = +1$; $\alpha_{31} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -1$

$\alpha_{12} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0$; $\alpha_{22} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0$; $\alpha_{32} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = +1$

$\alpha_{13} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -2$; $\alpha_{23} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -1$; $\alpha_{33} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1$

$+\alpha_{11}$	$-\alpha_{21}$	α_{31}
$-\alpha_{12}$	α_{22}	$-\alpha_{32}$
α_{13}	$-\alpha_{23}$	α_{33}

1 für det B

1/2 für B^{-1}

je 1/2 für α_{jk}

Aufgabe 2: Lineares Gleichungssystem mit Parameter ca (/9)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + ax_3 &= 4 \end{aligned}$$

Für welche Werte des reellen Parameters a besitzt das lineare Gleichungssystem

a) keine Lösung ?
b) unendlich viele Lösungen ?
c) genau eine Lösung ?
d) Man berechne die Lösungen für den Fall c).

X_1	X_2	X_3	R.S	
1	1	1	a	$\mid\cdot(-2)$ $\mid\cdot(-3)$
2	1	1	2	+
3	1	a	4	+
1	1	1	a	
0	−1	−1	2(1−a)	$\mid\cdot(-2)$ 1
0	−2	a−3	4−3a	+ 1
1	1	1	a	
0	−1	−1	2(1−a)	
0	0	a−1	a	1

1 a) für a = 1 ⇒ keine Lösung
1 b) es gibt <u>kein</u> a, für welches ∞-viele Lösungen gibt
1 c) für a ≠ 1 gibt es genau eine Lsg

Rechenseite für Aufgabe 2

oder: a) $a = \{1\}$
b) $a = \{1\}$
c) $a = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Aus der dritten Gl. des Gaußschen Algorithmus ⇒

$$x_3 = \frac{a}{a-1} \quad (1/2)$$

aus der 2. Gl. ⇒ $x_2 = -2(1-a) - x_3$

$$x_2 = -2(1-a) - \frac{a}{a-1} = \frac{2 - 4a + 2a^2 - a}{a-1} \quad (1/2)$$

$$x_2 = \frac{2a^2 - 5a + 2}{a-1} \quad (1/2)$$

aus der 1. Gl. ⇒ $x_1 = a - x_2 - x_3$

$$x_1 = a - \frac{2a^2 - 5a + 2}{a-1} - \frac{a}{a-1} = \quad (1/2)$$

$$x_1 = \frac{a^2 - a - 2a^2 + 5a - 2 - a}{a-1} \quad (1/2)$$

$$x_1 = \frac{-a^2 + 3a - 2}{a-1} \quad (1/2)$$

Aufgabe 3:
(Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix, inverse Matrix, Diagonalmatrix, Ähnlichkeitstransformation) (/10)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A. (/2)

$$\det(A - \lambda E) = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad 1$$

$$= -\lambda \cdot (1-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0$ 1/2 $\qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 1/2

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix A zu den jeweiligen Eigenwerten und geben Sie drei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ von A in normierter Darstellung an. (Wenn Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren nicht ermitteln konnten, bearbeiten Sie die nachfolgenden Teilaufgaben ohne Einsetzen von konkreten Werten) (/3)

EV zu EW $\lambda_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} 0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} &= 0 \\ 0 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} &= 0 \\ 1 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{13} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_{12} &= 0 \\ x_{13} &= -x_{11} \end{aligned} \quad ; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \; 1/2 \quad \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \; 1/2$$

EV zu EW $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$\begin{aligned} -x_{21} + 0 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{23} &= 0 \\ 0 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{23} &= 0 \quad 1/2 \\ 1 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{23} &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \varkappa \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1/2$$

$x_{21} = 0$; x_{23}, x_{22} : beliebig

$$\Rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; 1/2 \quad ; \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; 1/2$$

Fortsetzung Aufgabe 3:

c) Genau eine der folgenden drei Vektorsummen ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1. Markieren Sie die Vektorsumme mit dieser Eigenschaft:

- $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
- $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
- $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ✗ (1)

$\vec{e}_1+\vec{e}_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\vec{e}_1+\vec{e}_3=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2+\vec{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestätigen Sie Ihre Behauptung durch Ausführung einer geeigneten Multiplikation mit A (/2)

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A-\lambda_2 E)(\vec{e}_2+\vec{e}_3)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ✓ \quad (1)$$

d) Geben Sie folgende Werte oder Matrizen an oder begründen Sie, warum diese nicht existieren: (Hinweis: dies ist ohne weitere große Berechnungen möglich) (/3)

(1) - Die Determinante von A det $A=0$, weil A eine Nullzeile hat

(1) - Die Determinante der inversen Matrix A^{-1} existiert nicht, weil det $A=0$

- Eine zur Matrix A ähnliche Diagonalmatrix D und eine zugehörige Transformationsmatrix P die $P^{-1}AP = D$ erfüllt.
(Produkt muss nicht nachgeprüft werden-

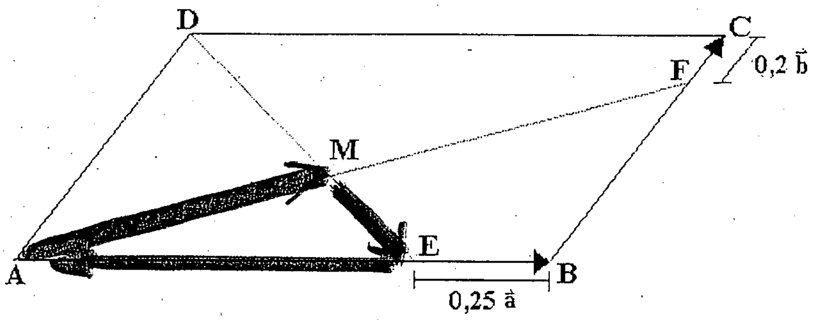
$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (1/2)\ ; \ P=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:
Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit von Vektoren **ca** (/ 8)

Gegeben ist das folgende Parallelogramm, welches von den Vektoren

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ aufgespannt wird.

Die Strecke $\overline{FC}$ hat die Länge $\overline{FC} = 0{,}2 \cdot |\vec{b}|$, $\overline{EB}$ die Länge $\overline{EB} = 0{,}25 \cdot |\vec{a}|$



a) Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{DE}$ durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

ca (/ 2)

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$$
$$= \vec{a} + \vec{b} - 0{,}2\vec{b}$$
$$= \vec{a} + 0{,}8\vec{b} \quad 1$$
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$
$$= -\vec{b} + \vec{a} - 0{,}25\vec{a} = +0{,}75\vec{a} - \vec{b} \quad 1$$

Fortsetzung Aufgabe 4

b) Seien nun $\mu \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AM}$ und $\sigma \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ME}$, mit $0<\mu<1$ und $0<\sigma<1$.

Lösen Sie durch Überlegen (ohne Rechnung): **ca** (/ 2)

Welchen Vektor ergibt $\mu \cdot \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} + \sigma \cdot \overrightarrow{DE}$?

Markieren Sie diese Beziehung in der Grafik.

$$\mu \cdot \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} + \sigma \cdot \overrightarrow{DE} =$$

$$= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ME} = \quad 1/2$$

$$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} = \vec{0} \quad 1/2$$

1/2

+ 1/2 für Markierung in der Grafik

c) Nutzen Sie die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus, **ca** (/ 2)

um mit den Ergebnissen von a) und b) μ und σ zu berechnen.

$$\overrightarrow{AM} = \mu \cdot \overrightarrow{AF} = \mu(\vec{a} + 0{,}8\,\vec{b})$$

$$\overrightarrow{ME} = \sigma \cdot \overrightarrow{DE} = \sigma(0{,}75\,\vec{a} - \vec{b}) \quad 1/2$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AE} = 0{,}75\,\vec{a}$$

$$\vec{a}\underbrace{\{\mu + \sigma \cdot 0{,}75 - 0{,}75\}}_{=0} + \vec{b}\underbrace{\{0{,}8\mu - \sigma\}}_{=0} = \vec{0} \quad 1/2 \quad \Rightarrow \boxed{\sigma = 0{,}8\mu}$$

$$\Rightarrow \{\mu + 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot \mu - 0{,}75\} = 0$$

$$1{,}6\mu = 0{,}75 \quad 1/2$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\mu = 0{,}46875} \Longrightarrow \boxed{\sigma = 0{,}375} \quad 1/2$$

Fortsetzung Aufgabe 4

d) In welchem Verhältnis $\overline{AM} : \overline{MF}$ teilt $\overline{DE}$ die Strecke $\overline{AF}$? **ca** (/ 2)

$\overrightarrow{AM} = \mu \cdot \overrightarrow{AF}$ 1/2

$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF}(1-\mu)$ 1/2

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MF}} = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{0{,}46875}{0{,}53125} = \frac{15}{17} = 0{,}88235$$ 1

Aufgabe 5: (Hauptachsentransformation) ca (/ 13)

Gegeben ist die folgende Kurve 2. Ordnung :

$$\frac{32}{25}x_1^2 + \frac{18}{25}x_2^2 + \frac{48}{25}x_1 x_2 - \frac{9}{5}x_1 + \frac{12}{5}x_2 = 0$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Hauptachsentransformation Art und Lage des Kegelschnittes. Zeichnen Sie (Teil b) die Kurve im gegebenen Ausgangskoordinatensystem.
Hinweis: Die Kurve ist nur gedreht, nicht verschoben.

(/ 9)

$A = \begin{pmatrix} \frac{32}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix}; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ +12/5 \end{pmatrix}; \quad a_0 = 0$

1/2

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{32}{25} - \lambda & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{18}{25} - \lambda \end{vmatrix} = 0 = \left(\frac{32}{25} - \lambda\right)\left(\frac{18}{25} - \lambda\right) - \left(\frac{24}{25}\right)^2$

1/2

$0 = \frac{576}{625} - \frac{50}{25}\lambda + \lambda^2 - \frac{576}{625} = 0 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$

1/2 $\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 0$ 1/2

<u>EV zu EW $\lambda_1 = 2$</u>

$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ 1/2

$\begin{pmatrix} -\frac{18}{25} & \frac{24}{25} \\ 24/25 & -\frac{32}{25} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} -18x_{11} + 24x_{12} = 0 \\ 24x_{11} - 32x_{12} = 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow x_{11} = \frac{24}{18}x_{12} = \frac{4}{3}x_{12} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ 1/2

$\Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ 1/2

<u>EV zu EW $\lambda_2 = 0$</u> $\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 32/25 & 24/25 \\ 24/25 & \frac{18}{25} \end{pmatrix}$ $32x_{21} + 24x_{22} = 0 \Rightarrow x_{21} = -\frac{24}{32}$ $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix};$ 1/2

1/2 1/2 $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

11

1/2 1/2

$$P = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}; \Rightarrow \det P = +1 \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} -9/5 \\ +12/5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = P^{-1} \cdot \vec{a} = P^T \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & +0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7{,}2/5 + 7{,}2/5 \\ + 5{,}4/5 + 9{,}6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a_0 = 0$$

$$2 y_1^2 + 0 + 0 + 3 y_2 + 0 = 0 \quad 1$$

$$y_2 = -\frac{2}{3} y_1^2 \quad 1/2 \quad \Rightarrow \text{Parabel}$$

Fortsetzung Aufgabe 5:

b) Zeichnen Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sie den Graphen der Kurve (Maßstab 1 LE = 1 cm). (/4)

Fortsetzung Aufgabe 5:

b) Zeichnen Sie die Lage des transformierten Achsensystems im x_1,x_2 System und zeichnen Sieden Graphen der Kurve (Maßstab 1 LE = 1 cm). (/4)